

**TEORÍA DE SUBASTAS  
Y REPUTACIÓN DEL VENDEDOR**

Pedro Durá Juez

Julio 2003

Dirección de Estudios  
Comisión Nacional del Mercado de Valores  
Monografías nº 3. 2003

Pedro Durá Juez es profesor de la Universidad Complutense de Madrid y Secretario General del Consejo Consultivo de Privatizaciones.

Las opiniones expresadas en este documento reflejan exclusivamente la opinión de los autores y no deben ser atribuidas a la Comisión Nacional del Mercado de Valores.

La Comisión Nacional del Mercado de Valores, al publicar esta serie, pretende facilitar la difusión de estudios que contribuyan al mejor conocimiento de los mercados de valores y de su regulación.

La Comisión Nacional del Mercado de Valores difunde la mayoría de sus publicaciones a través de la red INTERNET en la dirección [www.cnmv.es](http://www.cnmv.es).

© CNMV. Se autoriza la reproducción de los contenidos de esta publicación siempre que se mencione su procedencia.

ISBN: 84-87870-36-8

Depósito legal: M-34.173-2003

Imprime: Sociedad Anónima de Fotocomposición  
Talisio, 9. 28027 Madrid

## RESUMEN

La Teoría de Subastas ha experimentado en el último cuarto de siglo un importante desarrollo. Asimismo, en la última década ha crecido su influencia práctica en los diseños de subastas. En el presente trabajo después de describir los tipos básicos de subastas y de realizar un esquema histórico de su desarrollo, se realiza una revisión de la literatura teórica de subastas, así como de algunos de sus resultados.

Adicionalmente se plantea un modelo que toma como punto de partida la Teoría de subastas pero que introduce algunas especificidades. Por un lado, asume que el vendedor carece de capacidad de autocompromiso lo que implica que los compradores ya no tienen certeza sobre las normas que finalmente serán aplicadas en el proceso de venta en el que están participando. Por otro lado, en la literatura de subastas repetidas se suele analizar el papel que puede jugar la reputación de los compradores mientras que en el caso del modelo que proponemos se trasvasa el énfasis hacia la reputación del vendedor. Para ello, suponemos que el vendedor es un jugador con “vida larga” (realiza varias venta) mientras que los compradores tienen “vida corta” y sólo se presenta a una única venta (aunque conocen la historia de las ventas anteriores). Se analiza como, en algunos contextos, el vendedor puede tener incentivos para adoptar mecanismos que le doten de credibilidad y la manera de realizarlo.



## ÍNDICE

### 1. INTRODUCCIÓN

### 2. TIPOS DE SUBASTAS Y BREVE DESCRIPCIÓN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS SUBASTAS

- 2.1. Tipos básicos de subastas
- 2.2. Evolución histórica de las subastas

### 3. REVISIÓN DE LA TEORÍA DE SUBASTAS

- 3.1. Algunos enfoques diferentes a la corriente principal
  - 3.1.1. Modelos con competidores no estratégicos
  - 3.1.2. Subastas con información completa
- 3.2. El “modelo de referencia”
- 3.3. Variaciones sobre el modelo de referencia
  - 3.3.1. Aversión al riesgo
  - 3.3.2. Modelos con valoraciones comunes y modelo general
  - 3.3.3. Asimetrías entre los compradores
  - 3.3.4. Colusión
  - 3.3.5. Subastas secuenciales

### 4. UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

- 4.1. Introducción
- 4.2. El modelo
- 4.3. Tipo de vendedor conocido
- 4.4. Incertidumbre sobre el tipo de vendedor

### 5. CONCLUSIONES

### 6. BIBLIOGRAFÍA

ANEXO 1: Información completa en subastas al primer precio

ANEXO 2: Obtención de las funciones  $BI(.)$  Y  $PI(.)$ .

ANEXO 3: Obtención de un EBP en el modelo con incertidumbre sobre el tipo de vendedor y con una venta



## 1. INTRODUCCIÓN<sup>1</sup>

Aunque el uso de las subastas se remonta a la antigüedad el desarrollo de la Teoría de Subastas es relativamente reciente: comienza a mediados del siglo xx y no es hasta la última década de ese siglo cuando consolida su reconocimiento e influencia práctica. No obstante el desarrollo teórico ha tenido un importante desarrollo desde la década de los ochenta y para algunos autores se ha constituido como una rama con entidad propia dentro de la Teoría Económica.

La Teoría de Subastas, proporciona importantes herramientas — e intuiciones — en amplios campos de la corriente principal de la teoría económica que, en principio, parecen lejanos a las subastas. Klemperer (2003) expresa esta idea parafraseando un anuncio de cerveza: “la Teoría de Subastas refresca algunos aspectos que otras partes de la Teoría Económica no puede alcanzar”<sup>2</sup>. De esta manera puede ayudar a mejorar nuestra comprensión de otros métodos para la formación de precios tanto cuando interviene sólo el vendedor (los precios que aparecen expuestos en los escaparates) como cuando ambas partes intervienen en la fijación de precios; también tendría aplicaciones en mecanismos de asignación que no son vía precios como las colas, el racionamiento, actividades de grupos de presión, “guerras de desgaste”, entre otros. En todo caso la Teoría de Subastas presenta claras analogías con la fijación de precios por parte de un monopolio y tiene conexiones cercanas con la teoría de mercados competitivos.

Por otra parte, es conocido que un elevado volumen de transacciones económicas son realizadas a través de diferentes tipos de subastas tanto en el ámbito privado como público. Por tanto, además del interés teórico la Teoría de Subastas es útil para proporcionar pistas sobre el resultado que en contextos concretos que se podría esperar con diseños de subastas alternativos [“Auction design is a matter of ‘horses for courses’, not ‘one sizes fits all’ ”— Klemperer (2000, pp. 1) —]. La constatación de esta idea ha elevado la demanda de asesoramiento sobre diseños de subastas y sobre estrategias a aplicar por parte de los participantes lo que ha supuesto, sobre todo a partir de la década de los noventa, un incremento de su influencia práctica. A su vez, la aplicación de la Teoría de Subastas se ha extendido a otros campos como, por ejemplo, al diseño de determinados mercados que se abren a la competencia (como, el mercado mayorista de electricidad) o al análisis de posibles situaciones de dominio de mercado (un ejemplo de esto último se encuentra en el dictamen del Tribunal de Defensa de la Competencia sobre la proyectada fusión de Endesa e Iberdrola). De esta manera, la Teoría de Subastas es uno de los campos de la Teoría Económica con mayor potencialidad de utilización práctica.

En el apartado 3 de este trabajo se realiza un resumen de la literatura teórica sobre subastas prestando un especial interés al llamado “Modelo de Referencias” y a algunas de las variaciones que sobre él se han desarrollado. Previamente en el apartado 2 se realiza una descripción de los tipos básicos de subastas así como un esquema histórico de su importancia. Aunque los comentarios que realizamos, en general, se podrían aplicar cualquiera que sea el bien subastado en ocasiones pondremos ejemplos sobre la venta de empresas debido a que el modelo que proponemos en el apartado 4 tiene su origen en este campo.

La Teoría de Subastas suele asumir que las normas del proceso de venta están fijadas, son conocidas y existe la certeza de que se van a aplicar (este es un supuesto extendido en Teoría de

---

<sup>1</sup> Este trabajo tiene su origen en la tesis doctoral del autor, Durá (2002), que se presentó en la Universidad Complutense de Madrid en enero de 2003.

<sup>2</sup> Klemperer (2003, pp. 1) “Auction Theory refresh the parts other economics cannot reach”.

Juegos de la cual la Teoría de Subastas se puede considerar una aplicación). Al actuar así se está asumiendo que el vendedor está dotado con capacidad de autocompromiso. Sin embargo, en algunas ocasiones (aunque esto puede ser difícil de captar y de racionalizar) los compradores se comportan como si tuvieran algún grado de incertidumbre sobre el desenvolvimiento futuro del proceso de venta en el que están participando (por ejemplos, en algunos procesos puede existir incertidumbre sobre si la puja que van a presentar es la última o si con posterioridad se permitirá una nueva ronda de presentación de ofertas). Esta situación podría interpretarse en el sentido de que el vendedor carece de capacidad de autocompromiso. En la literatura teórica de subastas está relativamente poco tratado la problemática a la que se enfrenta un vendedor de este tipo que realiza varias ventas<sup>3</sup>.

En el apartado 4 se propone un modelo que tomando como base la Teoría de Subastas intenta analizar como los compradores se enfrentan a la existencia de incertidumbre sobre la aplicación de las normas de la subasta que se deriva de la ausencia de capacidad de adquirir compromisos por adelantado por parte del vendedor. En la literatura de subastas repetidas está relativamente más analizado modelos en los que los jugadores que repiten son los pujadores y en los que, por tanto, la “reputación” que importa es la de los compradores. En nuestro modelo se intenta cambiar el énfasis hacia la reputación del vendedor. Por ello suponemos unos compradores de “vida corta” (sólo se presentan a una venta) y un vendedor de “vida larga” (realiza varias ventas).

Finalmente se concluye con un apartado de conclusiones. El trabajo se complementa con tres anexos que contienen material más técnico y no imprescindible para seguir el hilo argumental de este trabajo.

## 2. TIPOS DE SUBASTAS Y BREVE DESCRIPCIÓN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS SUBASTAS

### 2.1. Tipos básicos de subastas

McAfee and McMillan (1987) definen una subasta como una institución de mercado que cuenta con un conjunto explícito de reglas que determinan la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas presentadas por los participantes<sup>4</sup>.

Podemos hablar de subastas tanto cuando se trata de vender un bien (en cuyo caso el subastador será el vendedor y los que presentan las pujas serán los potenciales compradores) como cuando el objetivo sea la adquisición de un bien o un servicio, como la ejecución de una obra o la provisión de suministros (en cuyo caso el subastador sería el comprador mientras que los postores serían los suministradores). A lo largo de esta trabajo, salvo que se especifique lo contrario, nos referiremos al primero de los casos mencionados.

Desde el trabajo de Vickrey (1961) se han considerado principalmente cuatro tipos de subastas básicos. A continuación realizamos una breve descripción de cada uno de estos tipos.

➤ **Subasta ascendente o inglesa.** Este es el tipo de subasta más utilizado. La característica que la define es el hecho de que el precio se va incrementando sucesivamente hasta que queda un único comprador, que es el que se adjudica el bien al precio final. Los sistemas por los que los precios se van incrementando pueden ser diferentes. Quizás el más conocido es aquel en el que

<sup>3</sup> Así, por ejemplo, en el trabajo de McAfee y McMillan (1987 pp. 732) lo autores se preguntaban: “¿Qué sucedería si eliminamos el supuesto de que el vendedor tiene la capacidad de comprometerse?”.

<sup>4</sup> McAfee and McMillan (1987, pp 701), “An auction is a market institution with an explicit set of rules determining resource allocation and prices on the basis of bid form the market participants”.

los propios postores van “cantando” sus pujas (bien oralmente o bien a través de su introducción en un mecanismo electrónico). Los compradores pueden presentar cuantas pujas deseen mientras que cumplan con la condición de superar a la puja más alta en vigor.

Normalmente cuando los teóricos de subastas analizan este tipo de subasta, implícita o explícitamente, se están refiriendo a una variante de la subasta ascendente en la que el precio es continuamente elevado (bien por el vendedor o de una manera automatizada) y los compradores se van retirando sucesivamente cuando el precio alcanza niveles que no están dispuestos a pagar (una vez que alguien se retira no se permite que se vuelva a incorporar). Cuando un comprador se retira, el resto de candidatos observa el precio al que se ha producido su salida, y el proceso continúa hasta que permanezca activo un único comprador, que se adjudica el bien al precio en que abandonó el último candidato. Este procedimiento, a veces, se pone en práctica utilizando un mecanismo electrónico que va marcando el precio actual y en el que cada comprador dispone de un pulsador que lo utilizará cuando desea abandonar<sup>5</sup>. En cualquier caso, una característica básica de la subasta inglesa es que los potenciales compradores siempre conocen cual es el nivel actual de la puja máxima.

➤ **Subasta holandesa o subasta descendente.** Sería el mecanismo inverso al anterior. En este caso el subastador comienza con un precio muy alto que va disminuyendo sucesivamente hasta que algún comprador lo acepta. Este tipo de subastas, menos conocida que la anterior, recibe su nombre por ser el mecanismo utilizado tradicionalmente para la venta de flores en Holanda.

➤ **Subasta con sobre cerrado al primer precio.** Los potenciales compradores presentan las pujas en sobre cerrado, el bien se adjudica al mejor postor y el precio coincide con la mejor puja. En este tipo de subastas destacan dos características que contrastan con lo que ocurría en la subasta inglesa: en el momento de presentar sus pujas los potenciales compradores no conocen cuales son las pujas de los demás; y cada comprador sólo puede presentar una única puja (es decir, no existen rondas adicionales de mejora).

➤ **Subasta con sobre cerrado al segundo precio (o subasta de Vickrey).** Esta subasta sería igual a la anterior pero con la diferencia de que el precio a pagar no sería la puja del ganador sino que sería igual a la segunda puja más alta presentada. De esta manera, el precio sería independiente de la puja presentada por el ganador con lo que cuando un comprador está preparando su oferta conoce que, en caso de ganar, no va a influir en el precio.

Estas cuatro formas básicas de subastas admiten muchas variantes. Así, por ejemplo, se puede incluir un precio mínimo que podría ser hecho público o no; se pueden imponer tasas por el derecho a pujar; el tiempo límite para presentar las pujas podría ser fijo o se podría prorrogar en un intervalo determinado después de presentada la última puja; los pagos se podrían correlacionar no sólo con la pujas sino con alguna variable cuya realización se conoce solo con carácter “ex – post” (por ejemplo, con los beneficios obtenidos en el caso de subastar un monopolio, o con el mineral extraído en el caso de subastar el derecho de una explotación minera); en las subastas inglesas se puede establecer un incremento mínimo sobre la puja más alta existente; etcétera.

También se podrían subastar **múltiples unidades** que en ocasiones constituirían partes de un mismo bien (como por ejemplo acciones de una empresa) y en otras serían bienes independientes que pueden ser homogéneos o no. En realidad, las subastas que dan nombre a la subasta holandesa serían de este tipo, ya que se intenta adjudicar múltiples lotes de flores.

En el caso de las subastas de múltiples unidades (por ejemplo de  $N$  unidades), la llamada **subasta discriminatoria** (en ocasiones se las denomina americanas) sería equivalente a la

---

<sup>5</sup> A esta variante de la subasta inglesa a veces se le denomina subasta japonesa. Nosotros utilizaremos la denominación genérica, es decir subasta inglesa o ascendente.

subasta al primer precio ya que las  $N$  unidades se adjudicarían a las pujas más altas por esas  $N$  unidades y cada uno pagaría un precio igual a su puja. Por su parte, las **subastas con precio uniforme** (o competitivas<sup>6</sup>), serían equivalentes a las subastas al segundo precio ya que se adjudicaría a las pujas más altas pero todos pagarían el mismo precio, que coincidiría con la puja más alta de las rechazadas. En ocasiones el precio de adjudicación, en lugar de ser igual a la puja más alta entre las rechazadas, es igual a la puja más baja entre las aceptadas. Aunque, también se le suele denominar de la misma manera, esta variante ya no sería equivalente desde el punto de vista estratégico a las subastas al segundo precio. Esto se debe a que, en este caso, cuando los compradores presentan sus pujas conocen que existe una probabilidad positiva de que, en caso de entrar entre los ganadores, su puja sea la que determine el precio.

En las subastas con múltiples unidades (o lotes) aparecen otras posibles variaciones en relación con las subastas básicas que no aparecían en el caso de subastas de un único objeto. Así, habría que determinar la forma en que se asignan las acciones en relación con el adquirente marginal en caso de empate, si se permite presentar ofertas sin precio y, en el caso de respuesta afirmativa, a que precio se entiende que se han presentado (podría ser al precio marginal, al precio medio – ponderado o no- de las ofertas aceptadas, al precio mayor, etc.), también habría que decidir si se realiza una única subasta en la que se adjudiquen todas las unidades o si se realizan varias subastas sucesivas o simultáneas, etc.

Por su parte, en las subastas dobles varios vendedores y varios compradores presentan pujas simultáneamente. Las subastas dobles se pueden considerar como una representación estilizada de mercados organizados (tales como los mercados de valores y numerosos mercados de bienes).

## 2.2. Evolución histórica de las subastas

En este apartado se realiza una apretada síntesis<sup>7</sup> sobre la utilización que históricamente han tenido las subastas. Para Shubik (1983), las subastas como método de venta sólo aparecen en sociedades comparativamente avanzadas después de que se cumplan al menos dos condiciones necesarias para su existencia: a) una adecuada concentración de población que proporcione un adecuado número de compradores y vendedores; y b) la existencia de una moneda, de modo que las pujas realizadas puedan ser valoradas rápidamente. De esta manera, señala Shubik, que antes del siglo XVII existieron pocos ejemplos regulares de ventas por subastas. En cualquier caso, los ejemplos conocidos, se remontan principalmente a la antigüedad, y ya en la época de la Roma antigua alcanzaron una cierta difusión.

Así, siguiendo a Shubik (1983) la referencia más temprana que se conoce sobre subastas organizadas realizadas de una manera regular, se refieren a la antigua Babilonia, en la que en cada pueblo se celebraba un mercado anual de esposas. No se permitía que los padres dieran a sus hijas en matrimonio al hombre de su elección sino que cada año las doncellas en edad de casarse eran reunidas todas juntas en una plaza, en la que se encontraban los hombres formando un círculo, y se procedía a su asignación mediante subasta. La venta se realizaba de una manera sucesiva empezando por la “doncella” considerada más “guapa” que se asignaba a la mejor oferta económica recibida. Por tanto, aunque en la cita de Herodoto contenida en Shubik (1983) no se dice textualmente, se entiende que se trata de una subasta ascendente o inglesa. Además, como hemos mencionado, existirán diversas subastas sucesivas en las que las mujeres vendidas, indudablemente, no se podrían considerar iguales. De esta manera estaríamos en el caso de subastas sucesivas de “bienes” no homogéneos<sup>8</sup>. En el texto citado se recoge que los hombres más ricos pujarían por obtener las mujeres más guapas mientras que los más humildes estarían

<sup>6</sup> En la literatura financiera también se les denomina holandesas.

<sup>7</sup> Para una relación más exhaustiva véase Cassady (1967).

<sup>8</sup> Intentamos centrarnos en aquellos aspectos descriptivos que nos dan la caracterización desde un punto de vista técnico, sin entrar en los aspectos morales que implica la subasta de seres humanos.

menos interesados por la belleza y se preocuparían, en mayor grado, por la dote asociada a cada mujer. De esta manera, las doncellas consideradas menos guapas no serían adjudicadas a los hombres que pagaran más sino a los que aceptaran una dote menor. Por tanto, la no homogeneidad del bien antes mencionado se podría resumir en la belleza, y de la cita se deduce que existía un precio positivo para las mujeres más guapas y un precio negativo para las que se consideran menos agraciadas físicamente. Adicionalmente, existía una fianza para intentar asegurar que efectivamente se celebraba la boda.

Por tanto, existían unas normas para realizar la asignación, para la fijación de los precios, para asegurar el cumplimiento de las obligaciones contraídas e incluso para incrementar la concurrencia tanto de compradores (se permitía que pudieran pujar hombres venidos de otros pueblos aunque fuesen lejanos) como de mujeres en venta (ya que se impedía que se asignaran con acuerdos “externos” a estos mercados organizados).

Los siguientes ejemplos que cita Shubik (1983) se refieren a la Grecia antigua en la que se utilizaban las subastas para la concesión de minas. Pero es con los romanos cuando la subasta como método de venta alcanza una amplia difusión y son utilizadas con cierta regularidad. El tipo de subasta utilizado era la subasta inglesa o ascendente y se utilizaba este método para vender los bienes confiscados (por ejemplo cuando se eliminaban a enemigos políticos), los botines procedentes de las campañas militares y los esclavos. Del latín proceden tanto la palabra castellana “subasta” como su traducción inglesa “auction”. La primera se deriva del hecho de que para indicar el lugar donde se iba a subastar el botín de guerra se clavaban unas lanzas (“hasta” en latín) en el terreno alrededor de las cuales se congregaba la multitud. De esta manera la subasta se celebraba debajo de las lanzas (“sub hasta”). La costumbre se extiende y en los foros las subastas de esclavos se celebraban bajo el signo de una lanza. La palabra inglesa para subasta tiene su origen en los incrementos (“auctio”) de precios sucesivos a los que da lugar la subasta inglesa.

Quizás una de las subastas más famosas de esta época es la venta en pública subasta del propio Imperio Romano en el año 193 por parte de la guardia pretoriana. El ganador fue Didius Juliannus que consecuentemente fue nombrado Emperador. El cargo sólo le duró dos meses hasta que fue despojado del título y ejecutado por Septimio Severo. Para Klemperer, (1999) se puede considerar como un triste y temprano caso de la “maldición del ganador”. En cualquier caso, si es interesante observar como los pretorianos tomaron algunas medidas pensadas para incrementar los ingresos. Por ejemplo, establecieron que el ganador no podía tomar represalias sobre ninguno de sus competidores. Esta medida (aunque podría disminuir los ingresos si los participantes fueran fijos) tendería a incentivar la participación de candidatos (ya que se eliminaba uno de los potenciales costes más importantes de su participación) y, por tanto, a elevar los ingresos a través de una mayor competencia.

Con la caída del Imperio Romano, y hasta el siglo XVII, la importancia de las subastas disminuye. Según Shubik (1983) las subastas no eran muy aceptadas en oriente, donde existía una gran tradición en la negociación, mientras que en la edad media de occidente predominaba la regla de la autosuficiencia dentro del señorío, y, para los escasos intercambios, el trueque se encontraba muy extendido, con lo que la mayor parte de la población utilizaba relativamente poco el dinero. Por tanto, en esta época, las escasas concentraciones de población y la poca circulación de la moneda dificultaban, (shubik, 1983) la celebración de subastas de una manera regular. Aun así, se celebraban subastas para la venta de bienes que principalmente provenían de la muerte o ejecución de sus propietarios.

A partir del siglo XVII las subastas vuelven a tener importancia y se empiezan a utilizar nuevos métodos y a diversificar los bienes subastados (por ejemplo tienen alguna importancia la venta de barcos). Entre los nuevos métodos, se empieza a utilizar la subasta holandesa y, en las subastas ascendentes, se introduce la utilización del típico martillo que adjudica el bien e incluso se utilizan subastas con límite de tiempo para presentar las pujas. A partir de esta época

la profesión de “subastador” va a tener un importante desarrollo y, debido a la mala reputación que habían adquirido por la realización de prácticas deshonestas, en Inglaterra, ya en 1799, se forma una asociación (“Select Society of Auctioneers”) con el objeto de formar a los subastadores y hacer la profesión respetable.

Las casas de subastas también adquieren un importante desarrollo en Inglaterra y algunas se especializaran en determinados bienes (como, por ejemplo, caballos) y otras se dedicarán a subastar previa cita aquellos bienes que les propongan sus clientes. En Francia las subastas van a tener pautas parecidas pero estaban más intervenidas ya que los lugares para llevarlas a cabo estaban limitados y tenían un número fijado por lo que debían ser adquiridos o heredados. Para vender bienes raíces los franceses introducen una novedad en relación con la fijación del tiempo límite para presentar las pujas. Establecen que las subastas no se cerraban hasta que se consumieran tres velas (con un determinado tamaño) encendidas sucesivamente después de que se hubiese adjudicado a la mayor puja presentada. Si en ese tiempo se presentaban nuevas pujas superiores entonces el tiempo se prorrogaba en dos velas más. En Escocia también se utilizaba un sistema similar pero sin prolongar el tiempo. (Los argumentos que llevan a establecer este tipo de mecanismos son relevantes en la actualidad. Por ejemplo, en el contexto de las subastas de Internet, en el año 2000, mientras que eBay establecía un límite temporal fijo de cierre, en Amazon el límite era variable y se establece que al menos tienen que haber pasado diez minutos desde la presentación de la última puja). A finales del siglo XIX parece que la reputación de los subastadores, al menos en Inglaterra, había mejorado.

En el siglo XX la importancia de las transacciones realizadas por subastas ha sido muy significativa. Además su uso se ha ido extendiendo a nuevos bienes y servicios y se ha incrementado de manera notable el número de participantes tanto desde el lado de la oferta como del de la demanda.

A mediados de siglo (1960) según se indica en Cassady (1967) sólo en Estados Unidos existían entre 20.000 y 35.000 subastadores; las ventas de 1.900 casas de subastas al por mayor ascendieron a 3.400 millones de dólares y las comisiones ingresadas por alrededor de 1.600 empresas de subastas al por menor se situaron en el entorno de los 220 millones de dólares. Los bienes vendidos principalmente eran: tabaco, madera, frutas y vegetales, coches usados, pieles, bienes usados, antigüedades y bienes inmobiliarios.

Estas subastas, que principalmente serían subastas ascendentes o inglesas, no agotarían este medio como método de intercambio de bienes. Para Shubik (1983) las subastas con sobre cerrado (que, normalmente, no utilizan intermediario) pueden ser, incluso, más importantes para la economía de los Estados Unidos. Así, estas subastas son usadas para la compra de bienes de elevado valor por parte de las industrias, como turbinas o transformadores, y también por parte del Estado, por ejemplo, para muchos contratos militares. En estos casos, además del precio se valoran otros aspectos por lo que hablaríamos de subastas multidimensionales o concursos.

El Estado es uno de los agentes más importantes en el desarrollo de las subastas, y actúa tanto de comprador como de vendedor. De hecho una parte importante de sus compras las suele realizar a través de mecanismos de subastas, principalmente con sobre cerrado. También es muy importante la utilización de las subastas por parte del Estado cuando éste actúa como vendedor. Así, los gobiernos utilizan este medio (aunque no de manera exclusiva) para la venta, entre otros, de: títulos de deuda pública, reservas de divisas o de oro, derechos de exploración y de explotación de minerales, venta de empresas públicas. Algunas de estas subastas, como las de deuda pública o las de préstamos de regulación monetaria realizados por los Bancos Centrales, tienen además una elevada importancia cuantitativa y ha existido un amplio debate sobre su diseño (por ejemplo, a mediados del año 2000 el Banco Central Europeo modificó el diseño de sus subastas de regulación monetaria).

Las subastas del espacio radioeléctrico, principalmente para telefonía móvil, realizadas en Estados Unidos a mediados de la década de los noventa así como las de las licencias de UMTS

(la telefonía móvil de tercera generación) realizadas a final de siglo en los principales países de Europa, han supuesto importantes hitos para las subastas tanto desde un punto de vista teórico como práctico<sup>9</sup>. Desde el punto de vista práctico, los ingresos generados, tanto en Europa como en los Estados Unidos, ascienden a unas cifras especialmente elevadas (“la mayor subasta de la historia” según un artículo del *New York Times* referido a las subastas realizadas en los Estados Unidos). Desde el punto de vista teórico, también van a tener gran importancia ya que se utilizó un diseño que se debe a economistas especializados en Teoría de Subastas. Por tanto, se puede decir que, desde el punto de vista de su influencia en las prácticas utilizadas, la Teoría de Subastas alcanza su mayoría de edad.

También el final del siglo XX ha visto como las subastas se desarrollaban a través de un nuevo medio: Internet. La utilización de las posibilidades de la red para la realización de subastas ha supuesto la extensión de este sistema como medio de venta a un importante número tanto de compradores como de vendedores así como a la venta de los artículos más variados. Al mismo tiempo, como se mencionó anteriormente, ha implicado una amplia utilización de las subastas al segundo precio que hasta ese momento había tenido un escaso desarrollo práctico. Por poner un ejemplo, en el año 2001 eBay (el líder de las subastas por Internet) contaba con 42 millones de usuarios en los 22 países en que estaba presente y sacaba a subasta un millón de artículos cada día (300 millones al año). Entre los bienes subastados se pueden encontrar los objetos más diversos, por ejemplo, desde un castillo en Marruecos hasta una panadería, pasando por las máquinas de votación que crearon la confusión en Florida en las elecciones presidenciales de 2000, sin hablar de las pertenencias de todo tipo que quieren vender los particulares.

Por tanto, podemos decir que Internet ha supuesto la “democratización” del uso de la subasta como método de venta al ponerlo a disposición de todos aquellos que cuenten con ordenador personal y un acceso a Internet.

Adicionalmente, la importancia de las llamadas subastas dobles también están adquiriendo cada vez mayor importancia ya que además de sus usos “tradicionales” en los mercados de valores y en los mercados organizados de materias primas, en la última década se han empezado a utilizar en otro tipo de mercados como puede ser, por ejemplo, el mercado de electricidad al por mayor en diferentes países (como es el caso de España).

Para acabar este apartado añadir que también existen otros sistemas que han ido incrementando su importancia en la segunda mitad del siglo que no son llamados subastas aunque técnicamente los podamos catalogar como tales. Un ejemplo sería de los procesos para tomar el control de una empresa.

### **3. REVISIÓN DE LA TEORÍA DE SUBASTAS**

En el apartado anterior hemos descrito como las subastas se han utilizado desde la antigüedad. Sin embargo, llama la atención que el estudio teórico de las subastas no entra en la literatura económica hasta fechas relativamente recientes.

No es hasta 1956 cuando nos encontramos con el que se puede considerar el primer trabajo académico sobre la estrategia óptima a seguir para presentar las pujas<sup>10</sup>, el de Friedman (1956). Sin embargo, en este trabajo todavía no se utiliza la Teoría de Juegos ya que se considera que existe un único jugador “estratégico”. Habrá que esperar al importante trabajo de Vickrey (1961) para que el enfoque de equilibrio de la Teoría de Juegos se empiece a utilizar en el análisis de las subastas y de las estrategias para la presentación de pujas.

---

<sup>9</sup> Estas subastas también han sido criticadas por otras causas.

<sup>10</sup> Si bien puede existir algún precedente como el de Emblen (1944).

Hasta comienzos de la década de los ochenta (o finales de los setenta) el desarrollo de la literatura de subastas es relativamente lento. Así, a principios de los setenta Stark (1971) contabilizó alrededor de 100 referencias entre la literatura de investigación sobre subastas, estando la mitad de ellas fechadas con posterioridad a 1966. A finales de la década los setenta, Stark y Rothkopf (1979) identificaban alrededor del medio millar de referencias. Además del limitado desarrollo cuantitativo de la literatura, hasta comienzos de los ochenta escaseaban los trabajos que utilizaban la Teoría de Juegos mientras que predominaban los que seguían el enfoque comenzado por Friedman (1956).

Sin embargo, desde comienzos de los ochenta, al mismo tiempo que el enfoque de la Teoría de Juegos pasa a ser preponderante, se produce una “explosión” de las publicaciones de investigación (tanto teórica como empírica) sobre subastas. En el apartado 3.2.- se analizará el modelo quizás más extendido que podríamos denominar “modelo de referencia”, mientras que en el apartado 3.3.- realizamos una revisión de algunos de los desarrollos que tienen su origen en la modificación de uno o varios de los supuestos utilizados en dicho modelo. Previamente, en el siguiente apartado resumimos algunos enfoques alternativos.

### **3.1. Algunos enfoques diferentes a la corriente principal**

#### **3.1.1. Modelos con competidores no estratégicos**

Como se ha comentado el trabajo de Friedman (1956) inicia una literatura en el que los competidores del jugador que se está considerando no tienen un comportamiento estratégico (es decir, no trata de analizar el comportamiento de los demás y de sus posibles repercusiones sobre su propia estrategia). Por tanto, no se utilizan los conceptos de equilibrio desarrollados por la Teoría de Juegos.

Friedman presenta un método para determinar las pujas óptimas en una subasta al primer precio. En su modelo una de las claves es el análisis sobre las probabilidades de ganar, que van a depender del estudio de las pautas (“fijas”) que siguen los competidores para presentar sus respectivas pujas. Así, si una empresa tiene una valoración esperada ( $v$ ) del objeto que será vendido y presenta una puja ( $b$ ) que resulta ganadora entonces su beneficio será la diferencia ( $v - b$ ). Sin embargo, este sería su beneficio sólo en caso de ganar. Por tanto el beneficio (o utilidad) *esperado* ( $U^e$ ) vendría dado por,  $U^e = (v - b)P(b)$ , donde  $P(b)$  serían las probabilidades de que  $b$  sea la puja más alta. Por tanto, en este modelo las dificultades de calcular la puja óptima (la que maximiza la utilidad esperada) provienen de la estimación de  $P(b)$ . Este autor sugiere que para estimar esta probabilidad habría que observar los datos de las pujas presentadas en subastas anteriores para deducir las pautas de comportamiento de cada uno de los potenciales competidores. Una vez que se haya estimado la distribución que caracteriza el proceso de presentación de pujas de cada uno de sus competidores,  $P(b)$  sería simplemente el producto de las probabilidades de derrotar a cada uno de ellos.

Friedman realiza diversas extensiones de su modelo, como por ejemplo, al incluir un número desconocido de competidores, al analizar subastas simultáneas o a suponer que los compradores se enfrentan a restricciones presupuestarias.

Este trabajo fue el punto de partida de una inmensa literatura (denominada de pujas competitivas –“competitive bidding”<sup>11</sup>–) desarrollada principalmente en publicaciones periódicas de carácter técnico-sectorial. Aunque esta literatura va haciendo progresivamente más compleja la manera en que se calcula la función  $P(b)$ , tiene la misma característica básica que el trabajo de

---

<sup>11</sup> Según el propio Laffont (1997) este nombre puede tener su origen en que Friedman (1956) “estaba interesado en situaciones donde el número de pujadores era grande”. Esta nomenclatura puede ser confusa debido a que también es utilizada por diversos trabajos que utilizan el enfoque de la Teoría de Juegos.

Friedman: intenta buscar buenas estrategias de puja, tomando el punto de vista de una empresa, mientras que se considera estable el comportamiento de los competidores, en el sentido de que estos seguirían las mismas pautas que lo han hecho en el pasado. Este enfoque, por tanto, va a realizar un importante esfuerzo en el análisis estadístico de las pujas presentadas por los competidores para identificar la función  $P(b)$  relevante en cada contexto.

Por tanto, esta literatura considera que existe un único competidor “estratégico” y no analiza la cuestión de si el resultado obtenido podría formar parte de algún concepto de equilibrio. De esta manera se originan varias cuestiones: dada la puja óptima que finalmente obtenemos para la empresa considerada, ¿a las demás empresas competidoras les interesaría continuar con el comportamiento que se les ha asignado como dado? o por el contrario ¿les compensaría utilizar otras pautas de comportamiento para el cálculo de su puja?. Si la respuesta a esta última pregunta fuera afirmativa entonces seguramente la puja que habíamos calculado inicialmente para la empresa que estábamos considerando dejaría de ser óptima. En consecuencia, se nos plantea el interesante interrogante básico que surge de esta literatura: si asumimos que una empresa es estratégica y calcula su puja en función de cómo espera que se comporten las demás ¿cuáles son las razones para asumir que las demás empresas no son estratégicas?. Este es el principal cambio que introduce la Teoría de Juegos, ya que considera que todos los competidores se comportan estratégicamente y, por tanto, persigue encontrar aquellas estrategias que puedan formar parte de algún concepto de equilibrio teniendo en cuenta que los demás competidores se encuentran en la misma situación<sup>12</sup>.

Adicionalmente, la literatura de pujas competitivas plantea otras limitaciones que siguiendo a Laffont (1997) podríamos agrupar en los siguientes puntos:

Por un lado, se refiere al hecho de que al tomar el punto de vista de una empresa que participa en una subasta se limita a la búsqueda de una estrategia de puja óptima pero dentro de un entorno determinado. De esta manera, este enfoque no se podría enfrentar a cuestiones referentes a la optimalidad de las subastas como método de venta, al comportamiento relativo de métodos de subastas alternativos, al análisis de las oportunidades de comportamientos de colusión entre los participantes, etc.

Por otro lado, no sería capaz de reconocer totalmente la complejidad del problema optimizador de la empresa. Así, para Laffont (1997) este enfoque podría ser válido para la especificación del problema en un modelo de valores independientes privados aunque sería incapaz de especificarlo en contextos más generales. Uno de estos contextos podría ser cuando las pujas son estocásticamente dependientes debido a que las señales que reciben los competidores sobre el valor del objeto en venta son dependientes.

Y finalmente, sería incapaz de dar alguna pista de cómo comportarse en entornos nuevos, como por ejemplo los entornos que se crean cuando el vendedor pone en práctica un nuevo diseño de subasta.

### **3.1.2. Subastas con información completa**

En este enfoque ya se utiliza la Teoría de Juegos pero se va a asumir que las valoraciones de los compradores sobre el bien en venta son de dominio público y, por tanto conocidos por el resto de jugadores. Es decir, nos encontraríamos ante un juego con información completa (en estos juegos las funciones de ganancias de los jugadores son de dominio público y en el caso de las subastas estas funciones vendrán determinadas por las valoraciones de los compradores — las

---

<sup>12</sup> En Friedman (1956) se recoge una frase (que Laffont, 1997 califica como de “misteriosa”) por la que podríamos deducir que el enfoque de la Teoría de Juegos estaba latente en esta literatura desde sus orígenes: “Some of the simpler bidding problems can be solved by game-theory techniques”. Hay que destacar que esta frase se publica cinco años antes de la publicación del trabajo de Vickrey (1961) en el que, como se ha dicho, se utiliza por primera vez el enfoque de la Teoría de Juegos aplicado a las subastas.

cantidades máximas que están dispuestos a pagar—). Por tanto, en estos modelos, un comprador, cuando calcula su puja óptima no sólo conoce su propia valoración sino también la de sus competidores. Este no va a ser el supuesto normalmente utilizado por la Teoría de Subastas.

Por otra parte, este supuesto podría eliminar la justificación teórica que tendría un vendedor para la realización de una subasta. Es decir, si el vendedor conoce las valoraciones de los compradores y tiene capacidad de autocompromiso — como asume normalmente la Teoría de Subastas — el mecanismo de venta óptimo desde su punto de vista consistiría, simplemente, en seleccionar al candidato con la valoración más alta y realizarle una oferta del tipo “take-it or leave-it” por un precio “ligeramente” inferior a su valoración (estas ofertas llevan incorporadas la “amenaza” de no vender en caso de ser rechazada). Si este candidato considera “creíble” esa oferta lo mejor que podría realizar es aceptarla y de esta manera el vendedor extraería casi la totalidad del excedente de la transacción. (Evidentemente, si el vendedor no dispusiera de capacidad de autocompromiso entonces la situación no sería tan sencilla ya que la amenaza de no vender no sería creíble. En este caso, el comprador podría rechazar la oferta y se podría iniciar una negociación bilateral que teóricamente podría concluir con cualquier resultado intermedio entre la valoración del comprador y del vendedor o, en su caso, la valoración del comprador alternativo, es decir, el segundo con una valoración más alta<sup>13</sup>). Por tanto, una de las justificaciones para la utilización de subastas por parte de un vendedor sería el desconocimiento de cómo los potenciales compradores valoran la empresa.

La ventaja que plantea este enfoque con información completa es que la noción de equilibrio aplicable sería la forma más sencilla del Equilibrio de Nash (el cual ya no sería suficiente cuando introducimos información incompleta). En todo caso es interesante observar que algunos de los resultados obtenidos no van a variar en relación con el “modelo de referencia” (que veremos en el siguiente apartado) para el caso de las subastas al segundo precio y para las subastas ascendentes (es decir, en estos dos tipos de subastas los jugadores se comportan igual tanto si conocen como sus competidores valoran el bien en venta como si no lo conocen). No obstante, si encontramos importantes diferencias en las subastas al primer precio. En el Anexo 1 se realiza un análisis sobre las pujas de equilibrio en una subasta al primer precio en la que los compradores conocen las valoraciones de sus competidores. Para los otros casos nos remitimos al apartado siguiente.

### 3.2. El “Modelo de Referencia”

Este modelo no sólo es importante debido a que, quizás, es el más extendido y a que algunos de los resultados más importantes de la Teoría de Subastas se basen en él (como por ejemplo el Teorema del Ingreso Equivalente) sino también debido a que buena parte de la literatura se ha desarrollado a partir de la modificación o relajación de algunos de sus supuestos básicos. Por tanto, sería la base de partida y el modelo con el que se compararían los resultados de las variantes a las que ha dado origen.

A diferencia de lo comentado en el apartado 3.1.2.-, en el modelo de referencia, así como en la mayor parte de los modelos de la Teoría de Subastas, las valoraciones de los compradores no son de dominio público. Esto implica que nos encontramos ante un juego con información incompleta (llamados también juegos bayesianos). En este caso, los potenciales compradores cuando presentan sus ofertas van a tener que realizar conjeturas sobre como sus rivales pueden valorar el bien y sobre como pujarán en función de esa valoración y, además, tendrán que

---

<sup>13</sup> Es decir, tendríamos un ejemplo de un problema de “inconsistencia temporal” en la estrategia del vendedor y, por lo tanto, de la existencia de una “amenaza” no creíble. Así, desde el punto de vista del vendedor “ex-ante” la estrategia planteada parece adecuada, pero en el caso de que el potencial comprador rechace la oferta, el cumplimiento “ex post” de la amenaza ya no sería la estrategia óptima para el vendedor debido a que dejaría de realizar una venta que, aunque ejecutada a un precio inferior, seguiría siendo beneficiosa. Evidentemente esto es conocido por el comprador que intentará aprovecharlo rechazando la oferta con la expectativa de iniciar una renegociación.

conjeturar sobre las previsiones que, a su vez, los otros jugadores realicen sobre como él mismo va a pujar. Estos cálculos en los juegos con información incompleta podrían ser excesivamente complicados de modelizar.

Afortunadamente, la propuesta de Harsanyi (1967), que ha sido ampliamente utilizada en Teoría de Juegos, simplifica esta cuestión y permite una modelización manejable. Harsanyi propone que a los juegos estáticos con información incompleta se les añada una etapa inicial “ficticia” en la que el azar o la naturaleza determina el “tipo” de los jugadores que sólo es revelado a cada uno. El resto de jugadores sólo conocería la distribución de probabilidades de la que se ha derivado. Un supuesto importante, por tanto, sería que todos los jugadores tienen las mismas creencias sobre la distribución de probabilidades del resto de candidatos.<sup>14</sup>

La noción de equilibrio que se utiliza para estos juegos es el de Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN) que incorpora un refinamiento con relación al Equilibrio de Nash. La idea intuitiva es la misma que la del Equilibrio de Nash pero aplicado a un concepto de estrategias más sofisticado. Aunque la definición de estrategia es la misma para todos los juegos (la estrategia de un jugador es un plan completo de acción, es decir, especifica una acción factible del jugador en cada contingencia en la que le pudiera corresponder actuar) su plasmación en los diferentes juegos es diferente. Así, esta definición aplicada a los juegos con información completa supone que una estrategia es simplemente una acción (así en las subastas del apartado 3.1.2.- la estrategia de cada jugador, como se puede observar en el anexo 1, consistiría únicamente en una puja). Sin embargo, en los juegos con información incompleta una estrategia consiste en una acción para cada uno de los posibles “tipos” que el jugador podría llegar a tener. Como en el caso de las subastas con información incompleta, los tipos de los compradores vienen dados por las posibles valoraciones que pudieran haber llegado a tener del bien, entonces la estrategia no sería una única puja ( $b_i$ ) sino que estaría constituida por una función en la que la puja depende de la valoración ( $b_i=B_i(v_i)$ ). Conocida su valoración, entonces el jugador obtendría su puja concreta a partir de dicha función.

En realidad esto es un artificio teórico ya que en la práctica lo único que se observa es la puja que cada jugador ha presentado en un sobre cerrado y no la función de la que teóricamente se podría haber derivado. Llegados a este punto, una de las posibles preguntas que se pueden plantear sería que una vez que el azar ha revelado al comprador  $i$  cual es su tipo (o su valoración de la empresa) entonces ¿para qué sería necesario tener un plan completo que incluyera lo que hubiera hecho ese jugador, es decir las pujas que hubiera presentado, para cada una de las posibles valoraciones que podría haber tenido?. Parecería que sería suficiente con concentrarse en la puja a presentar considerando únicamente el conocimiento que ya tiene sobre cual es su valoración concreta. Una primera explicación se basaría en que es necesario para poder aplicar el concepto del EBN, lo cual no sería posible si las estrategias no especificaran todas las acciones que el jugador elegiría en cada uno de sus tipos. Esta explicación no parecería por si sola muy convincente aunque se podría expresar en términos más intuitivos.

Cuando un jugador (por ejemplo el  $i$ ) esta decidiendo cual es su puja óptima necesitará realizar una conjetura sobre cual será el comportamiento del resto de jugadores. Simultáneamente, los demás participantes para calcular su mejor acción realizarán, asimismo, una predicción de cual será la manera en que se comporten los otros jugadores entre los que se encuentra el propio jugador  $i$ . Por ello, para poder conjeturar cual será el comportamiento previsible de los demás, el jugador  $i$ , necesitará analizar como los demás jugadores conjeturan sobre su propio comportamiento. De esta manera, para realizar su elección, cada jugador tendrá que pensar como hubiera actuado en cada una de las otras posibles alternativas en las que se podría haber encontrado. El

---

<sup>14</sup> Este supuesto no se encuentra libre de controversias (véase, por ejemplo, Kreps, 1990). Esto es relevante en el caso de las subastas ya que, por ejemplo para Fudenberg y Tirole, (1991) este supuesto “estándar” de la Teoría de Juegos puede ser más convincente cuando los movimientos de la naturaleza representan acontecimientos públicos que cuando los movimientos de la naturaleza modelizan la determinación de las ganancias de los jugadores u otras características privadas. El “juego” de las subastas se encontraría en este segundo caso.

resultado práctico para nuestro propósito, como se ha comentado, es que cuando hablemos de estrategia no nos estaremos refiriendo a una puja concreta sino a una función cuya variable independiente es la valoración.

Definidas así las estrategias, el Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN) estaría constituido por una combinación de estrategias en el que la de cada jugador sería una mejor respuesta a las estrategias de los restantes jugadores. Es decir, esta definición implica que aunque un jugador pudiera cambiar su tipo (en nuestro ejemplo, ello supone que cambie su valoración del bien subastado), ningún jugador estará interesado en cambiar la estrategia jugada.

A continuación describimos los EBN para los cuatro tipos básicos de subastas pero con anterioridad vamos a enumerar los principales supuestos que definen el que se podría denominar “Modelo de Referencia” (‘Benchmark Model’) en la Teoría de Subastas. Estos supuestos básicos son esencialmente cuatro:

**i) Valoraciones independientes privadas (‘independent-private-values’):** Este supuesto en realidad comprende dos. Por un lado, implica que cada comprador conoce de manera privada con exactitud en cuanto él valora el objeto subastado. Esto a su vez implica que no existe información relevante (es decir, que pueda afectar a la valoración) sobre el objeto en venta que sea desconocida por los compradores, ya que, en ese caso, los compradores no podrían conocer con total exactitud en cuanto valoran el bien (en algunos contextos, como la venta de empresas, este supuesto llevado a su extremo puede ser poco convincente).

En segundo lugar, implica que las variables aleatorias de las que se derivan las valoraciones de los diferentes jugadores son independientes y, por tanto, las valoraciones de los compradores no tienen ningún tipo de correlación. Es decir, si el comprador  $i$  tiene una valoración “elevada” ello no afectaría a las probabilidades de que la valoración del comprador  $j$  fuera también “elevada”. Es decir, un jugador no puede extraer, de su propia valoración, ninguna información sobre como es previsible que los demás compradores valoren el objeto en venta.

**ii) Compradores simétricos:** Evidentemente este supuesto no implica que las valoraciones “ex post” de todos los compradores sean iguales. La simetría se refiere a que las valoraciones de los compradores se derivan de la misma distribución de probabilidad, es decir, los compradores serían iguales “ex ante”. Esto se podría expresar como que con anterioridad de realizar la subasta, el vendedor percibiría de manera similar a todos los compradores.

**iii) Compradores neutrales al riesgo:** Este supuesto implica que los compradores tienen funciones de utilidad del dinero lineales y, por tanto, maximizar su utilidad esperada sería equivalente a maximizar sus ganancias (monetarias) esperadas.

**iv) Los pagos son una función únicamente de las pujas:** Se asume que el vendedor al diseñar las subastas sólo puede hacer depender los posibles pagos realizados por los compradores de las pujas presentadas. Se excluye que se puedan establecer pagos en función de variables que con posterioridad a la celebración de la subasta aporten indicios sobre el valor del bien para el comprador (por ejemplo, nivel de beneficios en los años siguientes en el caso de una empresa, o nivel de petróleo extraído en el caso de una subasta de derechos de extracción, etc).

El modelo de referencia también asume otros supuestos adicionales entre los que se encuentran los siguientes: no existen costes de preparación de las pujas por parte de los compradores ni de análisis de las ofertas por parte del vendedor; no hay comportamientos colusivos entre los compradores y, por tanto, se comportan de una manera no cooperativa; el número de compradores es de dominio público y, también, son de dominio público las actitudes hacia el riesgo y las distribuciones de probabilidad de las valoraciones de todos los compradores. Asimismo, el vendedor tiene capacidad de auto-compromiso con lo que los vendedores tienen certeza sobre el cumplimiento de las normas.

A continuación se describen las estrategias de equilibrio (que formarían un EBN) en los tipos básicos de subastas mencionadas.

#### **a) Subasta inglesa (o ascendente)**

En este tipo de subasta los compradores tendrían una estrategia dominante<sup>15</sup> consistente en permanecer en la subasta hasta que el precio igualara su valoración. En ese momento se retirarían. Se puede mostrar que, cualquiera que sea el tipo del comprador (es decir, cualquiera que sea su valoración), y con independencia de las valoraciones que tengan sus competidores, en ninguno de los casos posibles podría obtener un resultado mejor desviándose de esa estrategia.

Si todos los participantes siguieran estas estrategias obtenemos que el resultado es eficiente en el sentido de que resulta ganador el comprador con una valoración más alta. El ganador paga un precio que es igual a la segunda valoración más alta (que es el precio en el que se retira el penúltimo pujador). Por tanto, el vendedor no logra extraer todo el excedente del intercambio, obteniendo el ganador unas ganancias netas igual a la diferencia entre su valoración y la segunda valoración más elevada (es decir,  $v_1 - v_2$ ).

#### **b) Subasta con sobre cerrado al segundo precio**

En este tipo de subastas los compradores también disponen de una estrategia dominante que consiste en presentar una puja igual a su valoración. Por tanto, las subastas al segundo precio presentan la interesante propiedad teórica de tener un equilibrio en estrategias dominantes<sup>16</sup> consistente en “decir la verdad” en el que cada jugador pujaría por su valoración real.

Este resultado descansa en que el precio a pagar por el ganador será independiente de la puja que él presente determinando sólo sus probabilidades de ganar (además de acotar superiormente el precio que podría llegar a pagar). Desde este punto de vista es fácil demostrar — Vickrey (1961) — que cualquier jugador no lograría, en ningún caso, incrementar sus ganancias presentando una oferta distinta (ya sea inferior o superior) a la de su valoración.

Así, si se presenta una puja inferior a la valoración disminuirían sus probabilidades de obtener el bien (dentro de los precios que le reportarían una ganancia neta positiva) y, en todo caso, si consiguiera el bien no lograría rebajar el precio pagado por él. Por tanto, en algunos casos estaría peor y en otros igual, pero nunca mejor que presentando la puja igual a su valoración. Si por el contrario presentara una puja superior a su valoración conseguiría incrementar las probabilidades de ganar pero esto sólo ocurría en situaciones en las que no le interesa ganar. Es decir, cuando la segunda puja más alta (que sería el precio que tendría que pagar) se situara por encima de su valoración. En estos casos ganar la subasta no sería beneficioso ya que tendría que pagar un precio por encima de su valoración. En aquellos otros casos en que gane la subasta y la segunda puja se sitúe por debajo de su valoración el resultado sería el mismo que cuando presentaba la puja igual a su valoración. Por tanto, elevando su puja también nos encontramos en que en ninguna situación sería posible incrementar sus ganancias.

---

<sup>15</sup> Las *estrategias dominantes* tienen la característica de que constituyen estrictamente la mejor opción para un jugador con independencia de cual sea la combinación de estrategias elegida por el resto de jugadores. A las estrategias dominantes también se les denomina estrategia estrictamente dominantes para diferenciarlas de las *estrategias débilmente dominantes*. Estas últimas suponen que el jugador estará mejor o al menos igual que eligiendo cualquier otra estrategia a su disposición, con independencia de cual sea la estrategia adoptada por el resto de los jugadores. Tanto en las subastas ascendentes y al segundo precio las estrategias a las que nos estamos refiriendo son estrategias débilmente dominante (aunque, en ocasiones, omitiremos el adjetivo débilmente).

<sup>16</sup> Los equilibrios en estrategias dominantes (que también ocurría en la subasta inglesa) son Equilibrios de Nash aunque el inverso no es cierto.

Adicionalmente, se puede comprobar que, para cualquier valoración que pudiera tener un comprador, la presentación de una puja igual a su valoración no sólo es una estrategia (débilmente) dominante sino que es la única. Por tanto, en equilibrio se espera que los compradores utilizarán la estrategia de “revelar la verdad” con independencia de cual sea su valoración. Esto se puede expresar diciendo que la combinación de estrategias  $b_i=B_i(v_i)=v_i, \forall v_i$  siendo  $i=1,\dots,N$ , donde  $N$  es el número total de compradores, constituye un EBN.

Con estos resultados, en el “modelo de referencia”<sup>17</sup>, el resultado de ambos tipos de subastas (inglesa y al segundo precio) sería, en equilibrio, idéntico tanto desde el punto de vista del vendedor como de los compradores: gana el comprador con la valoración más alta (con lo que se consigue la eficiencia económica) y el precio coincide con la segunda valoración más alta. Además, en ambos casos los compradores disponen de una única estrategia (débilmente) dominante que consecuentemente es la que utilizan en equilibrio. Estos resultados también se mantendrían para estos dos tipos de subastas en el modelo con información completa contemplado en el apartado 3.1.2.- (aunque no se sostienen cuando se modifican alguno de los supuestos del “Modelo de Referencia”, como veremos en el apartado 3.3.-<sup>18</sup>).

Adicionalmente, el hecho de que las estrategias utilizadas en ambos casos no son sólo estrategias de equilibrio sino que son estrategias dominantes (débilmente) implica que para los pujadores será óptimo utilizar estas estrategias incluso en el caso de que asignaran probabilidades positivas a que el resto de participantes se puedan desviar de sus estrategias de equilibrio (lo que no sucedería en Equilibrios de Nash sin estrategias dominantes).

Otra ventaja de este tipo de subastas sería la simplificación de la preparación de las pujas. Para los compradores este proceso sería muy sencillo no teniendo que analizar la información de la que disponen sus competidores ni conjeturar sobre cual sería su comportamiento. Es decir, con la simple información de su propia valoración le bastaría para calcular su puja óptima<sup>19</sup>.

Por tanto, en el “Modelo de Referencia” con la subasta al segundo precio el vendedor no ingresaría menos que con subasta inglesa (a continuación veremos que, en media, los ingresos de este tipo de subasta tampoco son inferiores a los obtenidos con la subasta al primer precio y con la subasta holandesa). Además, como hemos visto, presentan algunas ventajas como, por ejemplo, el que los compradores revelan sus verdaderas preferencias. Sin embargo, han sido subastas que han sido relativamente muy poco utilizadas. Rothkopf y Otros (1990) analizan algunas posibles causas que pueden explicar este hecho.

Una de las explicaciones se basaría en la elevada sensibilidad que, en este tipo de subastas, puede tener el comportamiento de los compradores a la posibilidad de que el vendedor pueda poner en práctica tácticas tendentes a elevar el precio por encima de la segunda valoración más alta. En concreto podría ser relativamente fácil (y además no tendría ningún coste) para el vendedor introducir una puja ficticia por encima de la segunda más alta. Esta puja se situaría muy cercana a la primera puja más alta extrayendo de esta manera la mayor parte del excedente. La posibilidad de que esto suceda (incluso aunque el vendedor no realice este tipo de prácticas) puede provocar que los compradores se comporten estratégicamente presentando pujas por debajo de sus valoraciones. Si esto sucede así y el vendedor se comporta honestamente el resultado sería que los ingresos esperados serían menores que los obtenidos con una subasta ascendente<sup>20</sup>. En Rothkopf y Otros (1990) se comenta que, también, en la subasta inglesa el

---

<sup>17</sup> Y también en el modelo en el que existe información completa como el del apartado 3.1.2.

<sup>18</sup> Por ejemplo, se sigue manteniendo cuando relajamos el supuesto de neutralidad al riesgo, pero no ocurre igual cuando levantamos el supuesto de valoraciones independientes privadas.

<sup>19</sup> En todo caso, recuérdese que en el “modelo de referencia” se asume que los costes de preparación de las pujas son nulos en todos los casos.

<sup>20</sup> Una de las posibles maneras de enfrentarse a este problema sería que las pujas se presentaran en sobre cerrado y que fueran abiertas simultáneamente siendo el proceso de apertura “certificado” por una tercera parte. Sin embargo, incluso en este caso Rothkopf y Otros (1990) comentan que el vendedor podría incitar a una persona de su

vendedor podría intentar poner en práctica algún tipo de prácticas de este tipo aunque en este caso los compradores van observando como se desenvuelve la subasta y si tuvieran sospechas podrían retirarse en cualquier momento.

La otra posible explicación, que estos autores ofrecen sobre la poca utilización de las subastas al segundo precio, se basa en las reticencias que, en algunos contextos, pueden tener los compradores para revelar sus verdaderas valoraciones (recordamos que cuando se trata de subastas no para vender sino para comprar un bien o un servicio entonces los pujadores no serían los compradores sino los vendedores y, en este caso, lo que las pujas podrían revelar serían sus verdaderos costes de producción, lo que es una información muy sensible para las empresas). Para Rothkopf y Otros (1990) la clave reside en que normalmente la literatura considera a las subastas como un acontecimiento aislado. Sin embargo, ellos consideran que raramente se pueden considerar como sucesos completamente aislados especialmente cuando nos encontramos en contextos empresariales. Así, en el caso de presentar una puja de acuerdo a su verdadera valoración (o a sus verdaderos costes, según el caso) se podría revelar a los competidores importante información sobre la tecnología de la que dispone la empresa. También podría ocurrir que terceros con los que la empresa tenga que negociar con posterioridad (trabajadores, suministradores, subcontratas, financiadores, etc.) obtengan una información que les otorgue ventaja en dichas negociaciones. De esta manera, los pujadores tendrían incentivos para proteger su información sensible lo que provocaría que, aun en el caso que supongan que el vendedor se va a comportar honestamente, presenten pujas por debajo de su valoración (o por encima de sus costes en el caso para adquirir un bien o servicio). Esto provocaría que, en media, los ingresos serían inferiores que en el caso de la subasta al primer precio<sup>21</sup>.

En el trabajo citado se desarrolla un modelo en el que terceros que negocian con la empresa que presenta una puja son capaces de apropiarse de un determinado porcentaje de la diferencia entre la puja que presenta el ganador y del precio que realmente paga. El resultado final es que los pujadores consiguen traspasar al vendedor (a través de pujas de equilibrio menores) el coste que le supone esa negociación con terceros.

Sin embargo, la elevada proliferación que las subastas al segundo precio han tenido a finales de los noventa en internet necesitaría de alguna explicación en la que no vamos a entrar<sup>22</sup>.

---

confianza que presentara una puja relativamente alta. Si esta puja no resultara ganadora no existiría ningún coste y podría servir para que el ganador pagara un precio mayor. En el caso de que esta puja resultara la ganadora entonces, según los autores mencionados, el vendedor podría encontrar algunos fundamentos para rechazarla o podría acordar con el ganador alguna compensación. De nuevo no haría falta que este comportamiento tuviera lugar ya que el simple temor a la utilización de este tipo de tácticas haría que se presentaran pujas inferiores.

<sup>21</sup> Mantener en secreto las pujas podría constituir una manera para evitar estos efectos aunque, para Rothkopf y Otros (1990), al menos existen dos problemas. Primero, el secreto podría ir en contra de que la transparencia necesaria para asegurar a los pujadores (o al público en general) que el proceso se ha hecho con honestidad y justicia. En segundo lugar, el secreto nunca es completo. Las pujas tienen que ser conocidas por los que evalúan las ofertas y precisamente la privacidad da un elevado poder al que posee la información, que pueden tener elevados incentivos a “filtrarla”. De esta manera, aunque la posibilidad de que se hagan públicas las ofertas sea pequeña sería suficiente para que los pujadores se desviaran de las estrategias de revelar la verdad.

<sup>22</sup> Podríamos avanzar que debido a los bienes subastados, al tipo mayoritario de participantes y a la privacidad la segunda causa comentada tendría una importancia menor. En relación con la primera de las causas, podríamos encontrar razones que facilitan la introducción de pujas falsas (en internet sería relativamente cómodo) pero también que lo disminuyen (como se realizan un número muy elevado de subastas a través de la misma empresa está tendrá fuertes incentivos a mantener su “reputación”). También podrían existir desventajas relativas de otros tipos de subastas. Por ejemplo, la subasta inglesa implica que cada pujador tiene que presentar varias pujas y como en internet suelen estar abiertas varios días, el estar pendiente de la evolución de las pujas, podría implicar un elevado coste para los pujadores. Sin embargo, en una subasta al segundo precio, los pujadores pueden presentar su puja de equilibrio y “olvidarse” hasta el cierre (aunque también hay evidencia de que en subastas al segundo precio en Internet, al menos al principio, los pujadores no suelen hacer uso de su puja de equilibrio).

### c) Subasta holandesa

En lo que se refiere a la subasta holandesa (en la que se recuerda que el vendedor iba disminuyendo el precio hasta que algún comprador lo aceptara) la situación a la que se enfrentan los potenciales compradores, desde un punto estratégico, es exactamente la misma que en una subasta con sobre cerrado al primer precio. Es decir, el comprador deberá elegir su puja sin conocer las decisiones de los demás competidores y, en caso de ganar, pagaría una cantidad exactamente igual a su propia puja. Por tanto, la información con la que cuenta a la hora de adoptar su decisión es idéntica en ambos casos y el resultado, al menos en teoría, de su decisión también será idéntico. Además, este resultado es independiente de las aptitudes ante el riesgo y del supuesto que se adopte sobre las correlaciones de las valoraciones de los compradores. Esta equivalencia nos permite centrarnos únicamente en las subastas al primer precio.

### d) Subasta con sobre cerrado al primer precio

A diferencia de lo que sucedía en la subasta al segundo precio, en las subastas al primer precio a los compradores se les presenta el conocido dilema de que pujas mayores provocan mayores probabilidades de ganar pero al mismo tiempo reducen el excedente en caso de ganar.

La obtención de la estrategia de equilibrio de los compradores ya no es un procedimiento tan directo como en los casos anteriores. Hay que tener en cuenta que ya no están disponibles estrategias dominantes y que, por tanto, cada comprador tendrá que realizar una conjetura sobre el comportamiento de los demás. Se puede demostrar (véase, por ejemplo, McAfee y McMillan, 1987) que la solución a este problema de optimización consiste en presentar una puja que sería la estimación que cada comprador puede hacer sobre cual sería la valoración más alta entre sus competidores, asumiendo que su propia valoración es la más elevada. Es decir, es como si un comprador en el momento de calcular su puja asume que va a ser el ganador y entonces, dado este supuesto, calcula cual sería la esperanza de la valoración más alta entre el resto de los compradores y presenta una puja igual a este valor. Si todos los compradores se comportaran de esta manera entonces el ganador será el que tenga una valoración más alta y el precio será su propia puja.

De esta manera, la función de puja de equilibrio sería (véase por ejemplo, McAfee y McMillan 1987):

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_{\min}}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}$$

en la que  $b_i$  y  $v_i$  son la puja y la valoración del comprador  $i$ , respectivamente;  $F(.)$  es la distribución de las valoraciones y  $N$  es el número de competidores.

En esta función de puja podemos observar varias características:

- Las pujas van a ser inferiores a las cantidades máximas que los compradores están dispuestos a pagar. (Por tanto, el vendedor conoce que en equilibrio el ganador estaría dispuesto a pagar una cantidad superior a la que ha incluido en su puja).
- La función  $B(.)$  es creciente en el nº de compradores. Es decir, el incremento de la concurrencia provoca que los compradores presenten pujas más agresivas.
- Cuando el nº de compradores tiende a infinito las pujas tienden a las valoraciones. (Esto es coherente con el modelo de competencia perfecta ya que en este caso los beneficios económicos o extraordinarios tienden a cero).

No obstante trabajar con la función de puja anterior puede resultar algo farragoso y en ocasiones se introducen supuestos que simplifican esa expresión. En el modelo que planteamos en el apartado 4.- utilizaremos dos supuestos, bastante extendidos, que aunque restan generalidad simplifican los cálculos: asumiremos distribuciones uniformes para las valoraciones y supondremos que existen únicamente dos compradores ( $N=2$ ). De esta manera, la función de puja anterior se simplifica a la siguiente función que llamaremos  $B^C(.)$ .

$$(1.) \quad b_i = B^C(v_i) = (v_i + V_{min})/2$$

Una vez obtenidas las funciones de equilibrio en los cuatro tipos de subastas básicas podemos comentar algunos de los principales resultados que se derivan del “Modelo de Referencia”.

En primer lugar, el vendedor obtenía los mismos ingresos esperados con los cuatro tipos de subastas básicas (este resultado ya fue expuesto en Vickrey, 1961). Esto es fácil de mostrar ya que, como hemos visto, en las subastas ascendente y al segundo precio el ganador pagaba un precio que coincidía con la segunda valoración más alta mientras que en la subasta al primer precio y en la subasta holandesa los compradores presentan pujas que coinciden con su estimación de la segunda valoración más alta asumiendo que la suya es la más elevada. De esta manera aunque “ex post” los precios sean diferentes “ex ante” los precios esperados por el vendedor coincidirán. Desde este punto de vista, el vendedor sería indiferente ante cualquiera de los cuatro tipos de subastas analizados<sup>23</sup>.

Este resultado posteriormente se generaliza [véase Riley y Samuelson (1981) y Myerson (1981)] en el llamado “**Teorema del Ingreso Equivalente**”, que establece que, si se cumplen los supuestos del Modelo de Referencia, los ingresos esperados por el vendedor son iguales en cualquier mecanismo de venta que cumpla con dos requisitos: (1) que, en equilibrio, el objeto siempre se asigne al pujador con una valoración más alta, y (2) que todo comprador cuya valoración se situara en el nivel más bajo posible tendrá una utilidad esperada igual a cero. Este Teorema es uno de los resultados más importantes de la Teoría de Subastas con aplicaciones en otros campos.

Otro importante resultado del “Modelo de Referencia” es que los cuatro tipos de subastas básicas pueden constituir el mecanismo de venta “óptimo” desde el punto de vista del vendedor (es decir, maximizan sus ingresos esperados), siempre que se acompañen de una política de precios mínimos óptima [Riley y Samuelson (1981) y de Myerson (1981)].

Este resultado es bastante interesante debido a que, un vendedor, para maximizar sus ingresos esperados no tendría que recurrir a diseñar sistemas complejos ya que con las subastas sencillas bastaría para obtener su propósito. Así, McAfee y McMillan (1987 pp. 714) señalan que:

“Este es un resultado poderoso. Ninguna restricción se ha impuesto en los tipos de políticas que el vendedor podría haber utilizado. El vendedor, por ejemplo, podría establecer diferentes rondas para las pujas, o establecer un pago por participar, o implantar subsidios a los compradores, o requerir que los perdedores paguen una cantidad en función de sus pujas, o permitir sólo la presentación de pujas durante un tiempo limitado. Pero ninguna de estas estrategias más complicadas incrementaría el precio esperado: las formas simples de subastas son las mejores entre un enorme conjunto de mecanismos de venta posibles”.

### 3.3. Variaciones sobre el modelo de referencia

De los resultados obtenidos en el apartado anterior, en una primera aproximación, podríamos esperar que los vendedores estarían poco interesados en el análisis de sistemas de venta

<sup>23</sup> Se recuerda que se está suponiendo neutralidad al riesgo. Como las varianzas de precio son diferentes si el vendedor no fuera neutral al riesgo dejaría de ser indiferente “ex ante” entre los cuatro sistemas de subastas.

alternativos debido a que serían indiferente entre ellos y, además, conseguiría maximizar sus ingresos esperados con cualquiera de los tipos sencillos de subastas.

No obstante para obtener estos resultados es necesario que se mantengan los supuestos del Modelo de Referencia. En este epígrafe vamos a relajar algunos de esos supuestos y observaremos que el Teorema del Ingreso Equivalente, en general, no se mantiene. Esto ocasiona que en unos contextos unos tipos de subastas puedan ser más ventajosos que otros. Por otra parte, los mecanismos de venta óptimo van a ser más complejos (y difíciles de implementar) y ya no van a coincidir con las subastas sencillas.

El levantamiento de los diferentes supuestos ha originado un amplia literatura por lo que seremos selectivos.

### 3.3.1. Aversión al riesgo

Cuando suponemos que los compradores tienen aversión al riesgo observamos que en la subasta ascendente y en la subasta al segundo precio este cambio no afecta a las estrategias de equilibrio de los compradores. Por tanto, los ingresos esperados de estos dos tipos de subastas no se modifican cuando los compradores son adversos al riesgo.

Sin embargo, la situación es diferente cuando nos referimos a la subasta al primer precio (que sigue manteniendo la equivalencia estratégica con la subasta holandesa). Recordamos que con la subasta al primer precio los compradores se enfrentaban a un dilema en el momento de presentar sus pujas: pujas mayores suponen un menor excedente en caso de ganar pero incrementan las posibilidades de ganar. La puja óptima resultaba de la resolución del problema de maximización de la utilidad esperada.

Cuando los compradores son adversos al riesgo la esencia de este planteamiento no cambia y la única modificación, es la diferente forma de las funciones de utilidad que de ser lineales pasan a ser cóncavas<sup>24</sup>. Esto supone que se altera la puja óptima (la que maximiza la utilidad esperada de los compradores) y se puede demostrar que esta nueva puja será superior que la que se obtenía cuando los compradores son neutrales al riesgo<sup>25</sup>.

La intuición descansa en que los compradores adversos al riesgo se van a intentar “alejarse” del riesgo de no ganar. Así, cuando se enfrentan al dilema antes mencionado van a ponderar más (con relación al caso en que son neutrales al riesgo) las probabilidades de ganar que el excedente que obtienen en caso de ganar. Es decir, valorarán relativamente menos el obtener una ganancia mayor en detrimento de tener más probabilidades de ganar. La paradoja es que en, equilibrio, aunque presentas pujas más agresivas, no lograrían incrementar sus probabilidades de ganar. En todo caso, la aversión al riesgo de los compradores jugaría a favor del vendedor ya que aumentarían los ingresos esperados.

Por tanto, como ya hemos comentado que los ingresos esperados en las subastas ascendentes y al segundo precio no varían podemos establecer que, *cuando los compradores presentan aversión al riesgo, los ingresos esperados de la subasta al primer precio (y de las subasta holandesa) serían superiores que los de la subasta ascendentes y los de la subasta al segundo precio.*<sup>26</sup>

Adicionalmente, también se ha analizado como sería la subasta óptima en presencia de aversión al riesgo de los compradores. El resultado que se obtiene es que ninguna de las cuatro subastas

---

<sup>24</sup> Suponemos que los compradores tiene funciones de utilidad esperada del tipo Von-Neumann Morgenstern.

<sup>25</sup> Este resultado ha sido establecido para algunos casos particulares, por ejemplo, en Mathews (1979) y Riley and Samuelson (1981), y de una forma más general en Maskin and Riley (1984).

<sup>26</sup> Para llegar a este resultado se ha supuesto que el vendedor continua siendo neutral al riesgo. Si asumimos que el vendedor, al igual que los compradores, también es adverso al riesgo entonces sus preferencias por la subasta al primer precio se intensifican aun más — Maskin y Riley (1984) —.

básicas mencionadas lograr cumplir con los requisitos para ser una subasta óptima. Por tanto, aunque hemos visto que la subasta al primer precio logra un aumento en los ingresos esperados no consigue maximizarlos. La subasta óptima, en este caso, sería algo compleja de instrumentar ya que, implicará un sistema de pagos y subsidios entre todos los potenciales compradores. Es decir, los diferentes participantes tendrían que realizar pagos (que podría ser negativos) aunque no ganaran la subasta. Asimismo, la cantidad a abonar por el ganador no tendría que coincidir con la puja presentada. En el diseño de la subasta óptima se tiene que buscar el equilibrio entre dos principios en conflicto (un problema muy común que nos encontramos en las relaciones de Agencia):

- a) Por un lado, como hemos visto que la aversión al riesgo de los compradores juega a favor del vendedor, en principio, se podría pensar que los ingresos esperados del vendedor podrían aumentar si se logra incrementar el riesgo al que se enfrentan los compradores. Esto se podría realizar introduciendo pagos (positivos o negativos) aleatorios.
- b) Sin embargo, por otro lado, en una distribución eficiente de los riesgos, la parte neutral al riesgo debe proveer de un seguro a la parte adversa al riesgo — véase, por ejemplo, Krep (1990) —. Es decir, el riesgo debe recaer sobre los agentes neutrales al riesgo, que en nuestro caso sería el vendedor. Por tanto, de este principio se deriva que el vendedor debería plantear una subasta en la que los compradores se encuentren plenamente asegurados lo que supone que estos serían indiferentes entre ganar y perder la subasta.

Como estas dos fuerzas están actuando conjuntamente, y sus implicaciones son contrarias, las subastas óptimas no van a incluir ninguna de estas dos prescripciones. Así, *las subastas óptimas se van a caracterizar por no incluir pagos aleatorios y por no incluir un seguro completo por parte del vendedor a los compradores* — Maskin y Riley (1984) — Por tanto, en una subasta óptima los pagos de los diferentes participantes estarán, de una manera determinista, en función de las pujas presentadas y los compradores se seguirán enfrentando al riesgo de no ganar la subasta, es decir, los compradores estarán estrictamente mejor en caso de ganar que en caso de perder.

Pero, siguiendo el trabajo de Maskin y Riley (1984), podemos deducir más características importantes que debería incluir una subasta óptima bajo aversión al riesgo de los compradores. Así, el vendedor tendría que cubrir parcialmente el riesgo de los compradores con valoraciones altas que no resulten ganadores y penalizar a aquellos con valoraciones bajas. Si asumimos que las funciones de puja son crecientes en las valoraciones, esto implica que los compradores que presenten pujas “bajas” tendrán que realizar pagos<sup>27</sup> y los que pujen alto recibirán una compensación (incluso aunque no ganen). En cualquier caso, como se ha dicho, a pesar de esta compensación seguirían prefiriendo ganar a no hacerlo por lo que el seguro que ofrece el vendedor nunca es completo<sup>28</sup>.

La complejidad de las subastas óptimas en presencia de compradores adversos al riesgo, que suponen la realización de pagos por parte de unos compradores y subsidios a otros, las hacen difíciles de utilizar en la práctica. En Mathews (1983) se recoge que cuando la aversión al riesgo es reducida la subasta óptima se puede aproximar cobrando una tarifa por participar que sea decreciente con la puja presentada. McAfee y McMillan (1987) aunque reconocen que este tipo de subasta no se utiliza citan algunos prácticas que podrían interpretarse como una aproximación a las subastas óptimas. Así, comentan que no es infrecuente el que existan tarifas por participar en una subasta y, aunque estas no suelen depender de la puja, en ocasiones se

---

<sup>27</sup> Estos pagos tendrían que permitir que se cumpla la restricción de participación de los candidatos, es decir, tendría que permitir que a pesar de ellos la utilidad esperada de participar fuera superior que la utilidad de quedarse fuera del proceso.

<sup>28</sup> La única excepción sería un posible comprador que posea la valoración más alta que se pueda tener, en cuyo caso el seguro en una subasta óptima sería total.

complementan con una recompensa de algún tipo a las pujas más altas entre las perdedoras (por ejemplo, con un trato favorable en otros contratos, o con un reconocimiento a los finalistas, etc).

### 3.3.2. Modelos con valoraciones comunes y modelo general

En el Modelo de Referencia se asumía que las valoraciones que los compradores tenían sobre el bien subastado eran independientes y privadas. Esto implica que las diferencias en las valoraciones se deben a que los compradores tienen preferencias distintas (en el contexto de la venta de empresas dentro de los elementos que podrían explicar las diferentes preferencias podríamos apuntar: las diferencias en las funciones tecnológicas utilizadas por los compradores, capacidades técnicas y de gestión diferentes, sinergias específicas para cada comprador, diferentes situaciones de partida en el mercado en que se desenvuelve la empresa en venta, etc.) y, además, supone que estas preferencias no se encuentran correlacionadas. El levantamiento de este supuesto ha dado lugar a uno de los campos más activos en la literatura de subastas. Como ya hemos comentado seremos selectivos en los temas a tratar.

El caso extremo del modelo de valoraciones privadas sería el llamado modelo de valoraciones comunes ('common values model'). En estos modelos todos los compradores valoran igual el bien subastado aunque esta valoración es "ex ante" desconocida. Los compradores sólo conocen este valor una vez que han adquirido el bien (en el caso de las empresas una vez que se toma la gestión). Antes de presentar las pujas los compradores reciben una "señal" que está correlacionada con el valor de la empresa en venta. Esta señal será diferente para cada comprador por lo que cada uno tiene una información diferente (esta señal-información viene de fuentes diferentes que la del vendedor – por ejemplo de investigaciones propias o de relaciones previas que haya podido mantener con la empresa en venta — que normalmente se presupone que suministra la misma información a todos los compradores).

Estos modelos se empezaron a aplicar en el campo de las subastas de derechos de exploración petrolíferas (subastas que han tenido gran desarrollo sobre todo en lo que se refiere a la plataforma continental en Estados Unidos). En este caso, parece claro que "ex ante" cada empresa puede tener sus exploraciones geológicas (la señal) pero ninguna sabe si realmente existe petróleo y, en su caso, su cantidad y sus condiciones de extracción.

En los contextos de valoraciones comunes es cuando surge el conocido efecto de la "maldición del ganador". En una primera aproximación, se puede explicar este fenómeno de la siguiente manera. Dada su señal, cada comprador realiza una *estimación* de la valoración del objeto en venta, en función de la cual calculará su puja óptima. Esto supone que, a diferencia del modelo de valoraciones privadas, su puja no se basa en su valoración sino en su estimación de la "verdadera" valoración. Si los compradores son simétricos, el ganador será el que haya realizado la estimación más alta, lo cual podría constituir una mala noticia para él ya que implica que todos los demás han estimado el valor de la empresa en una cantidad menor. Esto podría llevarle a pagar un porcentaje de la valoración superior a lo que había estimado e incluso a pagar un precio superior a lo que realmente vale.

Numerosos trabajos — el primero y muy conocido es Capen y otros (1971) — aplicaron este enfoque para intentar mostrar las aparentemente bajas tasas de retorno que obtenían las empresas petroleras de la adquisición de derechos de exploración a través de las subastas<sup>29</sup>. Sin embargo, según comenta McAfee y McMillan (1987) el hecho de que los pujadores se vean sistemáticamente sorprendidos negativamente por el resultado obtenido en estas subastas violaría las nociones básicas de racionalidad.

---

<sup>29</sup> Con posterioridad se proponen explicaciones alternativas para explicar estos hechos (véase, por ejemplo, Mead y otros, 1984).

Por eso, si asumimos que los pujadores tienen una racionalidad completa en el momento de presentar sus pujas tendrían que tener en cuenta que, en caso de ganar, su estimación sería la más elevada. De esta manera, adoptarían una actitud más prudente presentando pujas más reducidas. Este comportamiento más prudente se basa en el hecho de que el jugador  $i$  cuando estima el verdadero valor del bien no sólo tiene que tener en cuenta la señal que recibe sino también que, en caso de ganar, esta señal sería la mayor entre todos los jugadores (y este sería el caso que le interesaría debido a que en caso de perder este supuesto no le afectaría ya que siempre obtendría una utilidad de cero). El resultado es que la estimación del valor ( $v$ ) — cuando se asume que la señal propia es la más elevada entre las de todos los competidores — es menor que cuando sólo se tiene en cuenta la propia señal (que llamaremos  $x_i$ ) [esto lo podemos expresar como que  $E(v|x_i) \geq E(v|x_i, x_i > x_j \forall j \neq i)$ ; es decir, la esperanza de  $v$  condicionado sólo a  $x_i$  es mayor o igual que la esperanza de  $v$  condicionada tanto a  $x_i$  como a que  $x_i$  sea la mayor señal entre todas las recibidas por el resto de competidores]<sup>30</sup>.

Adicionalmente, la intensidad de este efecto es creciente con el número de competidores. Por tanto, en los modelos con valoraciones comunes, según se incrementa el número de competidores se van a producir simultáneamente dos efectos que actúan en sentido contrario sobre las pujas: por un lado, se mantiene el efecto competitivo existente en el modelo con valoraciones privadas según el cual las pujas se aproximan a la cantidad máxima que están dispuestos a pagar los diferentes competidores pero, por otro lado, al mismo tiempo disminuye la estimación de valoración de la compañía (y, por tanto, la cantidad máxima que estarían dispuestos a pagar es menor). Así, puede ocurrir que a partir de un nivel de competidores suficientemente elevado un incremento en su número provoque pujas menores debido a que el efecto derivado de la maldición del ganador domina al que hemos llamado efecto competitivo.

A la vista de este resultado, uno de los objetivos del vendedor, en estos contextos, sería intentar reducir el efecto de la maldición del ganador entre los potenciales compradores para suavizar su reacción defensiva consistente en presentar pujas menores. Para este objetivo, veremos que la subasta ascendente presenta ventajas frente al resto de los tipos de subasta.

En el caso concreto de la venta de empresas (y, aun en el caso de que el vendedor ofrezca una información amplia y exhaustiva) elementos tales como la capacitación y la motivación de la mano de obra, el nivel de relaciones con los clientes y proveedores (en los que influyen elementos tan complejos de evaluar como la reputación de la empresa), la capacidad organizativa y de dirección de la empresa en venta, entre otros muchos aspectos, serían difíciles de conocer con exactitud por los compradores antes de gestionar la empresa. De esta manera podemos argumentar que en la venta de empresas pueden existir elementos de valoración común. En este caso, cada comprador puede tener señales sobre estos elementos que pueden provenir de las entrevistas que se suelen mantener con el equipo directivo, de sus propios estudios o de las relaciones que ha ido manteniendo con la empresa en venta bien como cliente, como proveedor o como competidor. Por otra parte, comenzamos este apartado argumentando que también existen elementos de valoración privada. Por tanto, nos encontraríamos (como ocurre frecuentemente) con un modelo mixto en el que existen simultáneamente elementos de valoración común y elementos de valoración privada.

<sup>30</sup> Podemos usar un sencillo ejemplo para entender esto mejor. Existen tres pujadores y cada uno recibe una señal  $x_j$  (distribuida uniformemente en el intervalo  $[0,10]$ ) sobre el verdadero valor  $v$  (que sería la suma de las tres señales). Si no conociéramos ninguna de las señales la estimación que se podría hacer sería la esperanza de  $v$ :  $E[v] = E[x_1] + E[x_2] + E[x_3] = 5 + 5 + 5 = 15$ .

Sin embargo, cada comprador conoce su propia señal (supongamos, por ejemplo, que el jugador 1 tiene una señal  $x_1 = 4$ ). Si el jugador 1 cuando realiza su estimación de  $v$  sólo tiene en cuenta su propia señal  $x_1$  entonces la esperanza de  $v$  condicionada a conocer  $x_1$  sería:  $E[v|x_1] = x_1 + E[x_2] + E[x_3] = 14$ .

Pero si además de tener en cuenta su propia señal considera que va a ser el ganador y consecuentemente que las señales de sus competidores van a ser inferiores a la suya entonces:  $E[v|x_1, x_1 > x_j, j=2,3] = x_1 + E[x_2|x_1 > x_2] + E[x_3|x_1 > x_3]$ . Como hemos supuesto que  $x_1$  era igual a 4, las esperanzas condicionadas de las señales de los otros jugadores serían  $E[x_2|x_1 > x_2] = E[x_3|x_1 > x_3] = 2$ . Con estos valores  $E[v|x_1, x_1 > x_j, j=2,3] = x_1 + E[x_2|x_1 > x_2] + E[x_3|x_1 > x_3] = 4 + 2 + 2 = 8$  muy inferior al 14 estimado anteriormente.

Milgrom y Weber (1982) desarrollan un modelo más general en el que permiten la correlación entre las valoraciones de los compradores y en el que los modelos extremos de valoraciones privadas independientes y de valoraciones comunes son casos particulares. Introducen el concepto de afiliación que (de una manera aproximada) recoge la idea de que cuando un comprador percibe que el valor del bien en venta es “alto” entonces será más probable que los otros compradores también tengan un valor alto.

Este modelo es interesante ya que a diferencia de lo que ocurría en el modelo con valoraciones independientes, el conocer (o tener señales) de cómo los demás valoran la empresa, puede influir en la propia valoración. Es este hecho el que introduce una diferencia cualitativa entre la subasta ascendente y la subasta al primer precio que va a romper la igualdad de los ingresos esperados. Así, durante el proceso de presentación de pujas en la subasta inglesa o ascendente los compradores van observando el precio al que se van retirando sus competidores lo que les va proporcionando una información adicional de la que no disponían al comienzo del proceso. Esta información “extra” que no ocasionaba ningún cambio en un modelo puro de valoraciones privadas si va a introducir modificaciones cuando nos encontramos en un modelo mixto en el que también existen elementos de valoración común y las valoraciones se encuentran afiliadas. De una manera intuitiva podríamos decir que esta información adicional va a reducir el efecto de la maldición del ganador lo que provoca que, en media, los jugadores que todavía no se han retirado procedan a realizar una elevación de sus estimaciones sobre la valoración de la empresa en venta. Evidentemente, este efecto no ocurre en las subastas ni al primer ni al segundo precio ya que cuando los compradores presentan sus pujas no tienen información sobre las pujas que presentan sus competidores. (Es interesante destacar que, por tanto, en este contexto se rompe la equivalencia que existía entre los resultados obtenidos con las subastas ascendentes y al segundo precio).

Como resultado Milgrom y Weber (1982) demuestran que *cuando las valoraciones de los compradores se encuentran afiliados entonces la subasta ascendente o subasta inglesa conduce a unos mayores ingresos esperados que la subasta al primer precio y que la subasta al segundo precio.*

### **3.3.3. Asimetrías entre los compradores**

Otro de los supuestos del modelo de referencia es el de simetría entre los compradores. Este supuesto implica que todas las valoraciones de los compradores se derivan de una variable aleatoria con idéntica distribución. De esta manera, el supuesto de simetría implica que “ex ante” todos los compradores son iguales.

Sin embargo, podemos imaginar diversas situaciones en las que de manera previa al comienzo de la subasta se puedan observar asimetrías entre los compradores que pueden tener efectos relevantes sobre las pujas de los candidatos. En el contexto de la compra de empresas podemos citar diversos casos en los que existen asimetrías. Un ejemplo, muy estudiado es cuando uno de los competidores ya posee un porcentaje del capital de la empresa en venta. Este control le proporciona una situación diferente (mayor información, conocimiento del funcionamiento interno del Consejo de Administración, es al mismo tiempo potencial comprador y vendedor, etc.) a la de otros potenciales compradores. Otro ejemplo, sería cuando la empresa en venta se encuentra en un sector en el que el número de sus competidores es muy reducido. En este caso, los potenciales compradores de otros sectores que (bien por motivos financieros, de diversificación o por interés de explotar sinergias) estuvieran interesados en la compra, se encontrarían en una situación “asimétrica” en relación con los competidores de la empresa en venta que también estuvieran interesados en la compra. También nos encontramos con asimetrías cuando la empresa en venta posee concesiones administrativas (autopistas, líneas marítimas, transporte por carretera, etc.), entre aquellos potenciales interesadas que ya cuenten con otras concesiones en esos mismos campos y aquellos interesados que no las tuvieran y aspiren a conseguirlas a través de la compra de la empresa en venta. En las privatizaciones españolas podemos encontrar ejemplos de estos tres tipos de asimetrías.

Estas situaciones de asimetría se han tratado en la literatura de subastas de diversas maneras y, en general, dan lugar a modelos más complicados y con resultados no tan claros en relación con los obtenidos en los modelos simétricos. Una manera de modelizar estas situaciones es suponer que las valoraciones de cada tipo de comprador se derivan de distribuciones de probabilidad diferentes. Con independencia del origen de las asimetrías, vamos a suponer que existe un comprador "fuerte" al que los demás le atribuyen mayores probabilidades de tener una valoración más alta<sup>31</sup>. En este contexto también nos encontramos con diferencias importantes entre las subastas ascendentes y el resto.

En las subastas ascendentes siempre va a ganar el jugador que tenga la valoración más alta ya que el resto se van a ir descartando según aumenta el precio. Por tanto, en este tipo de subastas cuando los jugadores perciben que un competidor tiene unas elevadas probabilidades de tener una valoración superior a la suya van a tener muy pocas esperanzas de ganar la subasta. Ante las escasas probabilidades de obtener la empresa (y si asumimos que la participación en el proceso ocasiona costes) los incentivos para presentarse al proceso van a ser muy reducidos. El resultado será una escasa participación y, en media, un menor precio a pagar por el ganador (recordamos que estaría próximo a la segunda valoración más alta y la esperanza de esta será menor cuanto menor sea el número de participantes).

En la subasta al primer precio, los efectos de la existencia de una asimetría de este tipo están algo más suavizados. Así, a diferencia de lo que ocurre en las subastas ascendentes, ya no es seguro que siempre gane el que tenga la valoración más alta. Como los compradores son asimétricos entonces pueden tener estrategias diferentes y estas pueden provocar que exista una probabilidad positiva de que pueda ganar un candidato con una valoración más baja<sup>32</sup>. Por tanto, aunque para los competidores "débiles" los incentivos a presentar puja disminuyen en relación con los existentes en el modelo simétrico, esta disminución no es tan acusada como ocurría en la subasta ascendente.

Para que se presente esta situación diferenciada entre las subastas ascendentes y al primer precio no es necesario asumir que uno o varios candidatos tengan "ex ante" mayores probabilidades de que su valoración sea más elevada que la del resto. Por ejemplo, también nos encontraríamos en una situación parecida si uno de ellos posee una participación en el capital de la empresa en venta (véase, por ejemplo, Bulow y otros, 1999). Este participante, si no resultase ganador en la subasta, se convertiría en vendedor (suponiendo un contexto de una oferta por el 100% del capital). Esto provoca que en una subasta ascendente el candidato que posee una parte del capital de la empresa en venta le interese seguir pujando incluso cuando el precio supere a su valoración. Es decir, en su utilidad esperada se introduce otro componente que sería el precio a recibir por las acciones que posee en caso de perder. Este nuevo componente puede provocar que su puja óptima (la que maximiza su utilidad esperada) se sitúe por encima de la cantidad máxima que está dispuesto a pagar<sup>33</sup>. De esta manera, el resto de competidores esperarían que

---

<sup>31</sup> Por ejemplo, podríamos suponer que mientras la valoración del resto de compradores se distribuye uniformemente en el intervalo  $[0, 10]$  la valoración del jugador "fuerte" se distribuye también uniformemente pero en el intervalo  $[6, 20]$  y que esto es conocido por todos. (Hay que hacer notar que, aunque su esperanza, 13, es mucho más elevada que la del resto, 5, en este ejemplo no siempre el comprador fuerte tendrá la valoración más alta). Por tanto, los jugadores no sólo serían distintos "ex post" sino que también serían distintos "ex ante". Otra alternativa es la utilizada en Bikhchandani (1988) en la que existe incertidumbre sobre el tipo de un comprador. Así, la valoración del comprador fuerte se podría derivar de la misma distribución de probabilidades que la de los demás o de otra con un media más elevada. Esto es desconocido para el resto de compradores los cuales únicamente conocen las probabilidades de que el comprador corresponda a cada tipo.

<sup>32</sup> Si suponemos que, a pesar de las asimetrías, todos utilizaran la misma función de puja entonces el ganador siempre resulta ser el que tiene la valoración más alta. Sin embargo, en modelos asimétricos, en general, las estrategias utilizadas por los distintos tipos de compradores, en equilibrio, no tienen que ser iguales.

<sup>33</sup> Hay que observar que aunque esta estrategia (la de seguir pujando hasta un nivel que se encuentra algo por encima de su valoración) maximice "ex ante" los beneficios, puede, en algunos casos, ocasionar unas pérdidas "ex post". Según se recoge en Bulow y otros (1999) esta podría ser una manera de explicar (sin necesidad de recurrir a argumentos basados en que los directivos persiguen sus propios objetivos a expensas de los accionistas) las razones por las que, en contextos de valoraciones privadas, en algunas ocasiones se sobrepuja.

este competidor tuviera una estrategia de puja más agresiva, lo que provoca que tanto sus probabilidades de ganar como su excedente en caso de ganar sean menores. Por tanto, en las subastas ascendentes, y sin necesidad de asumir que las distribuciones de las valoraciones “ex ante” sean diferentes, si un candidato posee acciones de la empresa en venta también disminuye el atractivo del proceso de venta para el resto de candidatos. Por su parte, en las subastas al primer precio, la situación se modifica debido a que el comprador que ya posee un porcentaje de capital no va a poder influir, con su puja, en la cantidad que él obtendría como vendedor en caso de no obtener la empresa (ya que, como se sabe, en este tipo de subastas el precio sólo depende de la puja ganadora). Por tanto, como su puja sólo determina la cantidad que él paga en caso de resultar ganador no existirían incentivos para poner en práctica una estrategia agresiva y, de esta manera, no se desincentivaría la participación de sus competidores en el proceso.

Como consecuencia podríamos predecir que, en situaciones asimétricas como las descritas, los incentivos para participar en las subastas al primer precio son superiores a los de las subastas ascendentes. De esta manera, la concurrencia será mayor y esto nos permite avanzar que los ingresos esperados serían superiores con las subastas al primer precio que con las subastas ascendentes. En todo caso, con igualdad de participantes se pueden construir ejemplos en los que el precio esperado en la subasta ascendente en ocasiones sea inferior y en otras superior a la de la subasta al primer precio.

Por otra parte, al igual que ocurría cuando los compradores eran adversos al riesgo, ninguno de los cuatro tipos de subastas básicas sería óptima. El diseño de subastas óptimas también va a ser complejo en presencia de asimetrías ya que implicaría discriminar a los teóricos pujadores “fuertes”. Con ello se conseguiría incentivar tanto la participación en la subasta de candidatos “débiles” como la elevación de las pujas por parte de los “fuertes”.

#### **3.3.4. Colusión**

Otro de los supuestos asumidos en el Modelo de Referencia se refiere al comportamiento no cooperativo entre los participantes en la subasta. Esto implica que los compradores actúan de manera independiente sin coordinar sus pujas. Sin embargo, en cuanto relajamos este supuesto se plantea la posibilidad de que todos o parte de los compradores alcancen acuerdos entre ellos con el fin de no competir en la subasta y obtener el objeto subastado en mejores condiciones. La colusión podría realizarse mediante acuerdos explícitos o, en ocasiones, implícitos. La manera de actuar de estos cárteles podría tomar diversas formas en función tanto de las reglas de las subastas como de las características del objeto subastado. Por ejemplo, se podría elegir un miembro del cártel de forma aleatoria para que pujase por el bien y, posteriormente, este sería re-subastado entre los miembros del cartel. La diferencia entre ambos precios sería repartida entre todos los miembros. Alternativamente, en caso de subastas sucesivas los miembros del cartel se podrían ir turnando como candidatos para la obtención del objeto mientras el resto o no se presentan o presentan pujas “fantasmas” sin posibilidades de resultar ganadoras.

En todo caso la formación y el mantenimiento de estos carteles también tropiezan con diversas dificultades que son sensibles al diseño de las subastas. Hay que tener en cuenta que estas agrupaciones tienen una serie de costes de diferentes tipos (costes de coordinación, costes de sostenimiento entre los que se incluyen el coste esperado de llevar a cabo las “amenazas” cuando algún miembro se desvía de la estrategia conjunta, riesgos de ser acusado de comportamientos anticompetitivos, etc). De esta manera, para que los carteles sean estables los beneficios esperados de pertenecer a él para un pujador tendrían que ser superiores a los de actuar de manera independiente.

Sobre este tema se ha desarrollado una extensa<sup>34</sup> que analizan tanto los contextos más probables para la aparición de comportamientos colusivos y las dificultades existentes para detectar la

---

<sup>34</sup> Véase, por ejemplo, Hendricks y Porter, (1989) o McAfee y McMillan (1992).

existencia de estos comportamientos como los diseños de subastas que los dificultarían. Uno de los resultados interesantes cuando los compradores compiten sucesivamente es que para lograr sostener comportamientos cooperativos anticompetitivos es necesario la puesta en práctica de un “castigo” que se ejecute cuando un candidato se aparta de la disciplina del grupo. A su vez, para que ese castigo se ponga en marcha y, por lo tanto, surta efecto como mecanismo disuasorio es necesario que sea posible detectar con exactitud y rapidez cuando un jugador se desvía del acuerdo alcanzado. Por eso, uno de los problemas que se plantean a estos comportamientos colusivos es la falta de información y la incertidumbre sobre las actuaciones de sus miembros. Esto es un hecho fundamental para el diseño de subastas y para el análisis de las ventajas comparativas que presentan los diferentes tipos de subastas cuando se detecten riesgos de este tipo de comportamientos.

### **3.3.5. Subastas Secuenciales**

En este campo la literatura se ha centrado, principalmente, en modelos en los que los compradores se presentan a las sucesivas subastas con la certeza de que las normas establecidas se van aplicar. Estos modelos son de especial interés ya que se analizan las posibilidades que se presentan a los compradores para influir, con sus actuaciones presentes, en el comportamiento futuro de sus competidores. Los modelos son muy diversos y heterogéneos pero es interesante la diferencia que se plantea en modelos con valoraciones privadas independientes y con valoraciones correlacionadas.

Un ejemplo con valoraciones privadas es el de Ortega-Reichert (1968), en el que los compradores puede encontrar atractivo presentar pujas reducidas en la primera venta para inducir a su competidor a que utilice una estrategia conservadora en la siguiente venta. Es decir, el crearse una “reputación” de pujador débil le podría reportar beneficios en el futuro si con ello consigue que sus competidores presenten pujas reducidas.

Por el contrario, cuando asumimos valoraciones comunes, la aparición de la maldición del ganador, provoca que los compradores tengan el interés contrario. Así, por ejemplo, en el modelo de Bikhchandani (1988) el comprador con el “tipo” débil tendría incentivos a simular el comportamiento del vendedor con tipo fuerte. Con este comportamiento, conseguiría intensificar el efecto de la maldición del ganador entre sus competidores “débiles”, provocando que presenten pujas más reducidas. De esta manera, con valoraciones comunes, pueden existir incentivos para crearse una reputación de pujador agresivo.

En todo caso, observamos que en estos modelo se pone el énfasis en como la reputación de los compradores puede afectar al comportamiento de sus competidores.

## **4. UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR**

### **4.1. Introducción**

En el apartado anterior hemos comentado que la literatura teórica de subastas secuenciales ha puesto el énfasis en procesos en los que son los compradores los que repiten. Por tanto en esos modelos la reputación relevante es la de los compradores. A diferencia de ellos en este apartado proponemos un modelo en el que es la reputación del vendedor y no la de los compradores la que “importa”. Por tanto, intentamos cambiar el énfasis, pasando del análisis de la “reputación” de los compradores al análisis de la “reputación” del vendedor.

El objetivo inicial era desarrollar un modelo más aplicable a procesos repetidos de venta de empresas como pueden ser los programas de privatizaciones. Como es conocido la política de

privatizaciones ha alcanzado una gran importancia, especialmente en la década de los noventa. Pero nuestro objeto no es el de analizar sus causas, ni sus objetivos ni sus efectos, temas sobre los que existen numerosas e importantes publicaciones<sup>35</sup>, sino que nos centramos en algunos aspectos de la ejecución de la política de privatizaciones.

Para ello empezamos identificando algunas características relativas a los procesos de privatización, que recogemos como “hechos estilizados” (y que sin duda merecen matizaciones):

- a) “El mismo vendedor realiza, de una manera sucesiva, varios procesos de venta de empresas”. En ocasiones dentro del Estado existen varios Departamentos, Organismos o cabecearas de “holdings”, encargados de llevar a la práctica estas políticas. Esto puede ser relevante ya que cada uno de ellos puede generarse su propia “reputación”. Sin embargo, consideramos que es un único organismo el que gestiona y ejecuta las privatizaciones. En España se ha pasado por ambas etapas: al principio del actual Programa de Privatizaciones existían tres Agentes Gestores que realizaban privatizaciones (AIE, SEPPa y SEPI), mientras que en la actualidad se encuentran fusionados en uno (SEPI).
- b) “Los compradores se suelen presentar a un único proceso de privatización”. De nuevo, podemos encontrar ejemplos en los que un comprador se presenta a varias ventas aunque son situaciones relativamente poco frecuentes (en España sólo ha ocurrido en contadas ocasiones<sup>36</sup>). El origen de este comportamiento podría encontrarse en la elevada heterogeneidad de las empresas en venta, tanto en lo que se refiere a su situación económica-financiera, su tamaño como al sector al que pertenecen.
- c) “Los compradores conocen el comportamiento del vendedor en las anteriores ventas”. Este hecho estilizado también merece ser matizado debido a que existen detalles de los procesos de venta que no son conocidos. Sin embargo, dadas las exigencias de transparencia que tienen que cumplir los procesos ejecutados por el sector público, las principales características de la operación (como el mecanismo de venta genérico así como las sucesivas fases por la que los candidatos tienen que ir pasando) se suelen hacer públicas. De esta manera, los compradores, aunque sólo se presenten a una venta pueden conocer como se ha comportado el vendedor en el pasado.

Adicionalmente, del análisis y estudio de los procesos de venta de empresas, en ocasiones, es posible detectar en los vendedores algunas preocupaciones (en principio complejas de modelizar) referentes a como el desenvolvimiento de la “próxima” venta podría llegar a afectar a las siguientes. También se podría encontrar (aunque esto puede ser más difícil de captar) como los compradores suelen tener estudiado y analizado el comportamiento del vendedor en procesos anteriores y como, en ocasiones, no tienen plena certeza sobre las siguientes fases del proceso de venta. Por tanto, podríamos entender que los compradores presentan “alguna” incertidumbre sobre el desenvolvimiento futuro del proceso de venta en el que están participando.

La Teoría de Subastas consigue esquivar la indeterminación que suele aparecer en los problemas de negociación considerando que el vendedor (que actúa como monopolista) posee todo el poder de negociación. De una manera más precisa, se asume que el organizador de la subasta tiene la capacidad de auto-comprometerse, de una manera previa, a cumplir con el conjunto de reglas que regirán el proceso de venta. Esto implica, por ejemplo, que los compradores se comportan con la certeza de que el vendedor no intentará, una vez que han presentado las pujas, modificar las normas e iniciar una renegociación. El poseer esta capacidad puede reportar ventajas a los vendedores. El disponer de este poder de auto-limitar la propia capacidad futura de actuación podría constituir “paradójicamente” una ventaja, como ya fue resaltado en

<sup>35</sup> Veáse, por ejemplo, Vickers y Yarrow (1988). En relación con España, entre otros, Cuervo (1997) y Gámir (1999).

<sup>36</sup> Otro tema distinto serían los concursos que se realizan en las operaciones de privatización para seleccionar Asesores y Coordinadores Globales. En estos casos, si es frecuente que un mismo oferente compita en los sucesivos concursos.

Schelling (1960)<sup>37</sup>. Es decir, en contextos estratégicos, el disponer de un mayor margen de maniobra, en ocasiones, puede ir en perjuicio de los propios intereses del que lo “disfruta”.

Sin embargo, está relativamente poco tratado la problemática a la que se enfrenta un vendedor que no posee capacidad de auto-comprometerse por adelantado y que realiza varias ventas. Así, por ejemplo, en el trabajo de McAfee y McMillan (1987) se dedica un apartado a sugerir una agenda para futuras líneas de investigación. Una de ellas se basaba en la relajación de uno de los supuestos que, normalmente, se asume en la Teoría de Subastas al plantearse (como se comentó en el apartado introductorio) la pregunta: “¿Qué sucedería si eliminamos el supuesto de que el vendedor tiene la capacidad de auto comprometerse?”<sup>38</sup>.

Al plantearse la pregunta anterior, McAfee y McMillan realizan varias reflexiones:

“...Un monopolista racional encontrará la manera de lograr el compromiso. Sin embargo, no se entiende bien la manera en que esto se puede realizar. Una forma de racionalizarlo es que el vendedor juegue el juego repetidamente, mientras los compradores lo juegan solamente una vez. Entonces podría ir en interés del vendedor el cumplir con su mecanismo, debido a que una desviación podría destruir su capacidad de compromiso en el futuro. Sin embargo, aunque este argumento parece admisible, queda pendiente de formalizar y de establecer su coherencia lógica.”<sup>39</sup>

Precisamente el objetivo del modelo que planteamos es el de poder analizar el comportamiento de un vendedor sin capacidad de “auto-compromiso” y de unos compradores que no tienen certeza sobre las reglas que finalmente serán aplicadas, intentando captar, en diferentes contextos, las interacciones entre los jugadores cuando el proceso se repite<sup>40</sup>. A continuación describimos el modelo y realizamos un resumen de alguno de sus resultados — para un tratamiento más extenso y detallado véase Durá (2002) —.

## 4.2. El modelo

Empezamos describiendo el desarrollo temporal del juego propuesto. Uno de los primeros pasos que teníamos que dar era la modelización de la carencia por parte del vendedor de capacidad de autocompromiso. Como veremos esto lo intentamos afrontar mediante el supuesto de que el vendedor puede ser de diferentes “tipos” al mismo tiempo que se le otorga en el juego un movimiento adicional con posterioridad a la presentación de las pujas.

En el Cuadro 1 representamos el desarrollo temporal de nuestro modelo. El **primer movimiento** lo realiza la naturaleza asignando al vendedor un “tipo”. Dejamos para más adelante la

---

<sup>37</sup> “The paradox that the power to constraint an adversary may depend on the power to bind oneself” (Schelling 1960, p.24).

<sup>38</sup> “What happens if we drop the assumption that the seller is able to commit himself?”, McAfee y McMillan (1987 pp.732).

<sup>39</sup> “A rational monopolist will find some way to achieve commitment. However, it is not well understood how this can be done. One way of rationalizing this is that the seller plays the game repeatedly, while the buyers play it only once. Then it might be in seller’s interest to adhere to his mechanism, for a deviation might destroy his commitment ability for the future. However plausible this argument appears, it remains to be formalized and its logical coherence remains to be established”, McAfee y McMillan (1987 pp.732).

<sup>40</sup> Por tanto, no nos vamos a ocupar de aquellos casos en los que el encargado de ejecutar la venta lo realiza por encargo de su propietario (Bancos de Inversión en el caso de venta de empresas o Casas de Subastas o Portales de internet en las subastas de otros bienes). Aunque en estas situaciones se presentan características comunes a las que encontraremos en nuestro análisis también existen características diferentes. Así, en cualquiera de estas situaciones los intereses de los encargados de realizar la venta, normalmente no tienen que coincidir exactamente con los intereses de los propietarios. Así, cobra especial importancia el sistema de remuneración y, en general, del sistema de incentivos que se establezcan entre ambas parte. Estos problemas son los analizados por la “Teoría de la Agencia”. En este trabajo no entraremos en esta problemática y por eso supondremos que el vendedor es al mismo tiempo el propietario.

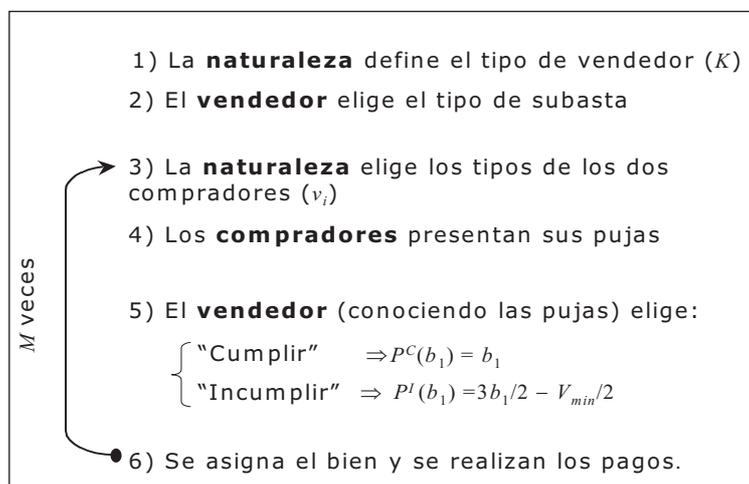
descripción de este movimiento aunque avanzamos que el tipo del vendedor viene definido por el valor de la variable  $K$ , que describiremos en el movimiento número cinco.

En el **segundo movimiento** del juego el vendedor elegiría la clase de subasta y, por tanto, las normas del proceso de venta. En nuestro modelo suponemos que escoge una subasta con sobre cerrado al primer precio. Este movimiento se encuentra presente en cualquier modelo de subastas explícita o implícitamente.

Estos dos primeros movimientos sólo tendrían lugar una única vez con independencia del número de ventas que realice el vendedor. Es decir, suponemos que en todas las ventas que realiza el mismo vendedor elige el mismo tipo de subasta. Sin embargo, los siguientes movimientos tendría lugar tantas veces como ventas se ejecuten (llamaremos  $M$  al n° de ventas).

El **tercer movimiento** inicia un nuevo proceso de venta y consiste en la asignación de tipos (es decir, de valoraciones) a los compradores que se presentan a cada venta. Aquí asumimos todos los supuestos del Modelo de Referencia. Entre estos supuestos se encuentra el de que todos los tipos de los compradores se derivan de la misma distribución de probabilidades y que a cada comprador sólo se le comunica su propia valoración y no la de los demás. Adicionalmente supondremos que estas funciones de distribución son uniformes en el intervalo cerrado  $[V_{min}, V^{max}]$ . Por tanto, estos serían los valores máximos y mínimos que cualquier comprador podría llegar a tener. También asumiremos que a cada venta se presentan dos únicos compradores y que nunca se han presentado a una venta anterior ni se presentarán en el futuro. El objeto de este último supuesto es desplazar la atención a la reputación del vendedor ya que los compradores sólo se preocuparán por la venta en la que participan.

### Cuadro 1.- Desarrollo temporal



En el **cuarto movimiento** los compradores, conociendo su valoración y el tipo de subasta elegida por el vendedor, presentan sus pujas en sobre cerrado.

Dejamos el quinto movimiento para el final. En el **sexto** simplemente se asigna el bien al ganador y se realizan los pagos correspondientes. En caso de que existiera una venta posterior se volvería al paso 3 como indica la flecha en el Cuadro 1.

Por tanto, los movimientos tercero, cuarto y sexto no incorporan novedades sobre los modelos desarrollados por la teoría de subastas.

Comentábamos que íbamos a modelizar la ausencia de capacidad de autocompromiso por parte del vendedor otorgándole un turno adicional. Este movimiento lo hemos representado en el Cuadro 1 como **movimiento quinto** y tiene lugar con posterioridad a que los compradores hayan presentado sus pujas (pero antes de que se asigne el bien y se realicen los pagos).

En este movimiento, el vendedor tendría que decidir si se adapta (“Cumple”) a las reglas de la subasta por él aprobadas en el movimiento dos o si opta por iniciar una “renegociación” del precio con el ganador (“Incumple”).

El objetivo de plantear así el modelo sería intentar captar aquellas situaciones en las que los compradores tienen incertidumbres sobre cuales serían las reglas finalmente aplicadas. Es decir, el esquema anterior también podría incluir aquellas situaciones en la que el comprador no aprueba ninguna norma (o la aprueba pero no la hace pública) y los compradores presentan sus pujas sin certeza sobre las normas que finalmente aplicará. En esta situación no cabría hablar de incumplimiento pero, en todo caso, los compradores no tendrían la certeza de cuales serán las reglas de la subasta (un ejemplo de una situación de este tipo podría ser cuando los compradores tienen dudas sobre si posteriormente tendrán la posibilidad de mejorar sus pujas, es decir, cuando no saben si la puja que presentan será la definitiva o si dispondrán de una fase adicional para mejorar sus ofertas).

En el caso de que el vendedor opte por “cumplir” entonces simplemente se aplicarán las normas de la subasta elegida. En nuestro caso, como hemos supuesto que elige una subasta al primer precio, entonces el precio que paga el ganador,  $P^C(.)$  (el superíndice  $C$  por cumplir), será igual a la puja que ha presentado,  $b_1$  (tal y como se recoge en el Cuadro 1).

El problema se nos plantea cuando tenemos que formalizar el escenario en que nos encontraríamos cuando nuestro vendedor opta por “incumplir”. En concreto para tener bien especificado el modelo tendremos que determinar la función de precio esperado en el caso de que el vendedor se decante por esta opción. Para ello vamos a suponer que el optar por “incumplir” origina el inicio de una teórica fase de negociación en exclusiva con el ganador<sup>41</sup>. Para obtener el precio esperado como una función de la puja presentada por el ganador en caso de que el vendedor opte por “incumplir” (a la que llamaremos  $P^I(b_1)$ , el superíndice  $I$  por incumplir) seguiremos dos pasos:

En primer lugar, calculamos el “intervalo factible” en el que asumiremos que se podría situar el precio después de la negociación. El límite inferior de este intervalo sería el precio que se deduciría de aplicar las normas de la subasta a las pujas presentadas. Este supuesto lo podríamos soportar en el hecho de que el vendedor no aceptaría un resultado inferior al que ya tendría asegurado simplemente con aceptar la oferta vinculante del ganador. El límite superior sería la valoración del ganador que se podría deducir, en equilibrio, de su puja.

En segundo lugar necesitamos precisar en que lugar de ese intervalo factible se esperaría que se situase el precio. Una alternativa sería incluir un modelo de negociación en este momento. Sin embargo nuestro objeto no es analizar los modelos de negociación, y, por ello, realizamos un supuesto simplificador: asumiremos que el precio esperado (tanto por el vendedor como por los compradores) se sitúa en la mitad de dicho intervalo. Como justificación de este supuesto

---

<sup>41</sup> Podríamos haber contemplado otras posibles alternativas algunas de ellas con cierta difusión en la práctica. La gama de opciones podría ser muy variada. Por ejemplo, se podrían iniciar negociaciones simultáneamente con varios de los potenciales compradores (prologando de esta manera la “presión competitiva” en las negociaciones). A su vez esta opción podría plantear numerosas alternativas según como el vendedor maneje la información que se va derivando de las negociaciones con los diferentes candidatos. También existirían otras posibilidades en las que, en lugar de negociar, el vendedor permitiera (en contra de las normas de la subasta) presentar sucesivas rondas para mejorar la oferta inicial. Es decir, si se diera este caso, lo que el vendedor estaría realizando un cambio de tipo de subasta, pero este cambio lo realizaría una vez que se han presentado las primeras pujas.

El objetivo de nuestro modelo no es el estudio del posible desarrollo de esta fase sino el análisis del efecto que la incertidumbre sobre el comportamiento del vendedor puede originar en el comportamiento de los pujadores.

podemos esgrimir que, ante la falta de información, todos los resultados dentro de dicho intervalo serían igualmente probables. De esta manera, el resultado esperado será la media o la esperanza matemática de una distribución uniforme, la cual coincide con su punto medio. Otra posible línea argumental podría ser la de asumir que el punto medio del intervalo factible es un buen candidato para constituir un “punto focal”, en el sentido de Schelling (1960), que permite la convergencia de expectativas de los participantes de la negociación.

Como resultado obtendríamos que el precio esperado cuando el vendedor opta por incumplir es superior que cuando cumple. Para completar el modelo también asumimos que cuando el vendedor “incumple” y se abre una fase de “renegociación” puede tener que incurrir en unos costes extras, que pueden ser diversos tipos y naturaleza<sup>42</sup>. Vamos a suponer que estos costes vienen resumidos por el valor de la variable  $K$ . Así, como mencionábamos, en el primer movimiento esta variable define el tipo de nuestro vendedor. Por tanto, el vendedor, para adoptar su decisión, tendrá que tener en cuenta los ingresos netos de sus dos opciones disponibles. Así el vendedor incumplirá siempre que el incremento de ingresos que obtenga ( $P^I(b_1) - b_1$ ) sea mayor que los costes en que incurra  $K$ .

En el Anexo 2, siguiendo los pasos antes comentados, se describe como se obtiene la función de precio,  $P^I(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2$ , que se recoge en el Cuadro 1. Se observa que, para la misma puja ganadora, el precio sería mayor que el que se obtendría si el vendedor “cumple” (es decir,  $P^I(b_1) > P^C(b_1), \forall b_1$ ).

A partir de este modelo base, en el apartado 4.3.- se asume que la variable  $K$  es de dominio público y, por tanto, conocida por los compradores mientras que en el apartado 4.4.- se asume que  $K$  sólo es conocido por el propio vendedor mientras que los compradores únicamente conocen lo la distribución de probabilidades de la que se ha derivado.

Hay que tener en cuenta que al introducir un movimiento adicional el juego pasa a tener la consideración de un juego dinámico (incluso cuando se realiza una única venta) y, por tanto, la noción de equilibrio utilizado en los juegos estáticos, EBN, es insuficiente para descartar algunos equilibrios poco creíbles. Por ello, para estos tipos de juegos se utilizan otras nociones de equilibrio como el Equilibrio Secuencial o el Equilibrio Bayesiano Perfecto (EBP). Este último será el que se utilice en los apartados siguientes<sup>43</sup>.

### 4.3. Tipo de vendedor conocido

Empezamos describiendo algunos resultados obtenidos del modelo cuando el tipo de vendedor es conocido y sólo realiza una venta ( $M=1$ ). Para ello consideramos diferentes valores del parámetro  $K$ , e intentamos comparar los resultados obtenidos por el vendedor en relación con los que obtendría cuando tiene capacidad de autocompromiso (como ocurre en el “Modelo de Referencia”).

---

<sup>42</sup> Por ejemplo, mientras está abierta una negociación es necesario tener personal propio ocupado parcial o totalmente en las tareas derivadas de dicha negociación. Adicionalmente, es frecuente que en los casos de compra-venta de empresas se contrate a un asesor externo (normalmente un Banco de Inversión) para que ayude en las negociaciones por lo que la renegociación puede originar la necesidad de contratar, o de prolongar los contratos, a estos asesores. Adicionalmente, las negociaciones también implican costes que se derivan del tiempo y la incertidumbre que generan. Algunos de estos costes pueden ser difíciles de medir como el deterioro de la empresa en venta debido a la dinámica que genera la sensación de transitoriedad.

También podrían existir otro tipo de costes indirectos para el vendedor. Así, el incumplimiento de las normas podría originar una mala imagen y una pérdida de “buena reputación” que podría tener efectos secundarios en el resto de las actividades — diferentes a la de la venta de empresas — desarrolladas por el vendedor.

<sup>43</sup> Para una descripción y comparación de estas nociones de equilibrios se puede consultar Fudenberg, y Tirole (1991). Gibbons (1992) contiene una descripción más intuitiva. Habría que mencionar que el EBP no estaría constituido sólo por una combinación de estrategias sino que además incluiría un sistema de conjeturas que deben de cumplir una serie de requisitos.

- a)  $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$ . En este caso se puede demostrar que los costes “extras” en que se incurren cuando se incumple son lo suficientemente elevados para que al vendedor no le compense incumplir. De este modo los compradores anticiparán que el vendedor cumplirá y, por tanto, presentarán sus pujas de acuerdo a la función  $B^C(v_i)$  que era misma función que se obtenía en el “Modelo de Referencia” cuando introducíamos los supuestos aquí utilizados y que se representaba en la ecuación (1.) (también la obteníamos en el Anexo 2 cuando  $\alpha=1$ , es decir cuando era conocido que el precio coincidiría con la puja presentada).

Por tanto, cuando los costes del vendedor son lo “suficientemente” altos los compradores tienen la certeza que va a cumplir y presentan las mismas pujas que en el contexto del “Modelo de Referencia” en el que el vendedor tiene el poder de auto-comprometerse. De esta manera, en nuestro modelo un vendedor sin esta capacidad de adquirir compromisos tendría la misma utilidad que un vendedor con esa capacidad siempre que los costes de incumplir sean lo “suficientemente” elevados.

- b)  $K=0$ . Este sería el extremo opuesto al anterior. Como con la opción de incumplir logra incrementar su ingreso esperado y el coste de realizarlo es nulo, el vendedor siempre “incumplirá”. Los compradores anticipando este comportamiento actuarán con la certeza del incumplimiento del vendedor. Este sería el caso analizado en el Anexo 2 donde obtenemos que los compradores utilizan la función de puja  $B^I(v_i)$  allí obtenida. Las pujas que se derivan de esta función son significativamente inferiores que las que se presentarían cuando los compradores tienen la certeza de que el vendedor va a cumplir (es decir,  $B^I(v_i) < B^C(v_i)$ ,  $\forall v_i > V_{min}$ ).

No obstante aunque las pujas presentadas sean inferiores se puede demostrar que el precio que el ganador finalmente pagará será el mismo en ambos casos. Es decir,  $B^C(v_1)$ , que sería la puja presentada por el ganador cuando tiene certeza de que el vendedor cumple, va a coincidir con  $P^I(B^I(v_1))$ , que sería el precio que finalmente pagará el ganador cuando presente su puja conociendo que el vendedor va a incumplir y finalmente incumple.

Por tanto, la anticipación por parte de los compradores, de la estrategia que seguirá el vendedor, provoca el efecto de anular la ventaja de la renegociación a través de la presentación de unas pujas lo suficientemente más reducidas para que el precio esperado sea el mismo. Así, el vendedor tipo  $K=0$ , en el caso de que pudiera elegir, sería indiferente entre las combinaciones de estrategias: **i)** “Incumplir siempre”—  $B^I(\cdot)$ , y **ii)** “Cumplir siempre”—  $B^C(\cdot)$ . En todo caso, este vendedor no tiene disponible la opción **ii)** debido a que carece de capacidad de auto-compromiso y a que, en este contexto, su “promesa” de cumplir no es creíble.

Al igual que ocurría con el vendedor del caso **a)**, el vendedor con costes de incumplir nulos tampoco ve reducida su utilidad con relación al vendedor del “Modelo de Referencia” que poseía capacidad de autocompromiso debido a que obtiene el mismo precio sin incurrir en ningún coste adicional.

- c)  $K > 0$  pero  $K \rightarrow 0$ . En este caso los costes de incumplir son muy pequeños (tienden a cero) pero son positivos. Por una parte, la situación sería similar a la anterior, en el sentido de que al vendedor le interesará incumplir siempre. Por tanto, los compradores usarán la función de puja  $B^I(\cdot)$  y el precio sería el mismo que los casos anteriores. Sin embargo, en esta ocasión el precio no coincide con el ingreso neto del vendedor. Esto es debido a que al precio obtenido habría que descontarle el coste,  $K$ , incurrido al “Incumplir”. De esta manera, el vendedor ya no sería indiferente entre las alternativas **i)** y **ii)** comentadas anteriormente sino que preferiría estrictamente la **ii)**. Es decir frente a la situación de incumplir y que los compradores presenten pujas bajas ( $B^I(\cdot)$ ) prefiere la opción de cumplir y que los compradores presenten pujas altas ( $B^C(\cdot)$ ).

Sin embargo, en ausencia de capacidad de auto-compromiso esta última situación no puede ser alcanzada en este contexto y, por tanto, este tipo de vendedores, a diferencia de los dos casos antes analizados, si experimentarían una disminución de su utilidad como consecuencia de su carencia de capacidad de adquirir compromisos por adelantado.

Por tanto, los vendedores que se encuentren con unos costes de incumplir positivos pero muy pequeños, tendrían incentivos para intentar adoptar diferentes mecanismos que le permitieran de una manera creíble dotarse de esta capacidad de auto-compromiso. Una de estas posibles formas, sugeridas por el propio modelo, sería la de intentar imitar a alguno de los otros dos tipos de vendedores analizados (es decir, el de costes nulos o el de costes altos). Ante la dificultad de reducir a cero los costes de incumplir la posible opción más factible sería la de elevarlos hasta que fueran lo suficientemente altos para encontrarnos en el caso **a**), es decir, que fueran mayores que  $(V^{max}-V_{min})/4$ .

En el sector público se han utilizado algunos mecanismos que se podrían interpretar en este sentido. Dentro del contexto de la venta de empresas podríamos citar la primera fase de privatización de RETEVISION en la que se aprobó una normativa específica aprobada por el Consejo de Ministros. En esta normativa se establecía el procedimiento a seguir en la venta, los requisitos que se exigirían a los candidatos, la manera en que se evaluarían las ofertas, etc. Uno de los efectos, de la aprobación de esta normativa es incrementar de manera importante los potenciales costes de incumplimiento.

No obstante cuando se quiere abordar un amplio proceso de venta de empresas (como puede ser el caso de un Programa de Privatizaciones) la aprobación de una normativa específica para cada venta puede ser un procedimiento excesivamente rígido y reglamentado que dificulte su desarrollo. Además cada uno de los procesos de venta puede tener una naturaleza muy distinta y necesitar de alguna flexibilidad y cierta capacidad de adaptación a lo largo del proceso. Por ello, en ocasiones se procede de manera diferente aprobándose principios y normas generales que serán de aplicación en todos los procesos.

Este es el caso del actual “Programa de Privatizaciones” en España, en el que previamente se han aprobado los principios a los que tendrán que atenerse los diferentes procesos de privatización. De esta manera, el Gobierno se auto-impone una serie de limitaciones en sus actuaciones. Sin embargo, dado su carácter general y relativamente flexible este mecanismo puede ser poco eficaz a la hora de generar expectativas en los agentes. Por ello, esta manera de actuar más flexible puede necesitar de algún mecanismo adicional para dotar de credibilidad la aplicación de estos principios generales.

Siguiendo con el caso español, este es uno de los posibles objetivos que se podía pretender perseguir con la creación del Consejo Consultivo de Privatizaciones (CCP). Este Consejo elabora un dictamen (no vinculante) sobre cada operación de privatización y se hace público con anterioridad a que el Consejo de Ministros apruebe la operación<sup>44</sup>. En la práctica, el CCP no tiene capacidad de impedir que las operaciones se aparten de los principios contenidos en el Programa de Privatizaciones aunque si puede tener el efecto de incrementar el “coste” de actuar de esa manera. Por tanto, desde este punto de vista, se podría entender como una “tecnología” para incrementar la credibilidad a través de elevar los costes de incumplimiento.

La Teoría de Juegos nos sugiere otras posibilidades de obtener “credibilidad” que se pueden originar cuando el “juego” se repite. A continuación describimos algunos de los resultados obtenidos cuando el vendedor realiza varias ventas ( $M>1$ ). Recordamos que aunque los compradores se presentan en una única ocasión, conocen la historia de la actuación del

---

<sup>44</sup> Sobre la actividad del Consejo Consultivo de Privatizaciones véase, CCP (1999, 2000, 2001, 2002 y 2003).

vendedor hasta la venta anterior (a esa historia la podríamos llamar  $h_{m-1}$ , si nos encontrásemos en la venta número  $m$ ).

- Si el **número de ventas a realizar por el vendedor es finito y conocido** por todos los jugadores, entonces obtenemos el resultado de que, en todas las ventas, se reproduce el mismo equilibrio que obteníamos cuando el vendedor realizaba una única venta. Así, los tipos de vendedor  $K=0$  y  $K \rightarrow 0$  “incumplirían” en todas las ventas mientras que el tipo de vendedor  $K \geq (V^{max} - V^{min})/4$  “cumpliría” en todas las ocasiones. Por su parte, los compradores anticipan este comportamiento (presentando sus pujas de acuerdo a  $B^I(\cdot)$  y  $B^C(\cdot)$ , en los dos primeros casos y en el último, respectivamente) y como resultado el precio esperado es el mismo. De esta manera, al igual que ocurría en el juego con una única venta, los vendedores tipo  $K=0$  y  $K \geq (V^{max} - V^{min})/4$  tendrán la misma utilidad que sería superior a la que obtendría el tipo de vendedor  $K \rightarrow 0$ . Por tanto, para este último tipo de vendedor, la carencia de capacidad de auto-compromiso sigue empeorando el resultado incluso cuando el juego se repite y, por ello, seguiría necesitaría adoptar algún mecanismo como los antes mencionados para elevar su utilidad.

El tipo de resultado descrito en el párrafo anterior (que es muy conocido en Teoría de Juegos aunque no esté libre de controversia) necesita asumir que no existe incertidumbre sobre el número exacto de ventas que va a realizar el vendedor y que además sea conocido por todos los jugadores. En los Programas de Privatizaciones es raro conocer, sin incertidumbre, este dato. En ocasiones se aprueban listas de empresas a privatizar pero pueden ser ampliadas en el futuro o, incluso, algunas de las previstas no llevarse a cabo. En el caso de España, SEPI tiene un número determinado de empresas, pero no todas están destinadas a la privatización. Además, el número puede aumentar cuando se le incorporan empresas procedentes de otros Departamentos o cuando se decide vender por separado filiales de sus empresas.

- Si el **número de ventas que realiza el vendedor es infinita (o indefinida)** nos seguimos encontrando en la misma situación que la comentada en el caso anterior para los tipos de vendedor  $K=0$  y  $K \geq (V^{max} - V^{min})/4$ : en todas las ventas se repite el resultado del juego de con una única venta.

Además, es de destacar que (en contra de lo que esperábamos encontrar) para el segundo tipo de vendedor mencionado, este resultado se mantiene, en la senda de equilibrio, tanto si asumimos que los costes  $K$  se soportan todas las veces en que se incumple, como si asumimos que el vendedor sólo incurre en estos costes la primera ocasión que se aparta de las normas (aunque para ello habría que modificar la especificación de las estrategias fuera de la senda de equilibrio).

- Sin embargo, cuando el número de ventas es indefinido la situación podría modificarse para el tipo  $K \rightarrow 0$ . En este caso, se puede construir un equilibrio en el que este tipo de comprador “cumple siempre” y los compradores presenten sus pujas de acuerdo a  $B^C(\cdot)$ . Por tanto, este tipo de vendedor conseguiría sostener un equilibrio en el que no necesite incurrir en los costes de “incumplir” para obtener el mismo precio esperado. En todo caso, para sostener este equilibrio (además de especificar la estrategias adecuadamente) es necesario que se cumpla la siguiente condición<sup>45</sup>.

$$(2.) \quad \delta \geq [(V^{max} - V^{min}) - 4K] / (V^{max} - V^{min})$$

En esta condición  $\delta$  es la tasa con la que el vendedor descuenta las ganancias obtenidas en la siguiente venta. Esta tasa es menor que uno (como cabría esperar de una tasa de des-

<sup>45</sup> Para los detalles véase Durá (2002).

cuento) pero se observa esta es una condición muy exigente ya que la tasa de descuento tendría que situarse en un entorno muy cercano a 1. Por tanto, para que se cumpliera el vendedor tiene que valorar las ganancias futuras casi tanto como las actuales. Esto puede ser más probable que ocurra en contextos con tipos de interés muy bajos o/y cuando el tiempo que transcurre entre una venta y la siguiente es muy breve. Por tanto, este resultado apoyaría la idea de que un vendedor de este tipo se encuentre interesado en poner en práctica un programa de ventas acelerado (recordamos que estamos sosteniendo un equilibrio en el que un vendedor, con unos costes de incumplir casi insignificantes, “cumpliría” en todas las ventas.).

#### 4.4. Incertidumbre sobre el tipo de vendedor

El modelo se hace más interesante cuando el tipo del vendedor es desconocido para los compradores. Entre las diferentes opciones existentes para modelizar esta idea asumiremos que el vendedor podría pertenecer a dos tipos: un tipo con costes de incumplir reducidos ( $K \rightarrow 0$ ) al que llamaremos “ $V_1$ ” y que cuenta con una probabilidad de  $\phi$ ; y el tipo “ $V_C$ ”, con unos costes elevados ( $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$ ) y con una probabilidad de  $1 - \phi$ .

Según el desarrollo temporal contenido en el Cuadro 1 en el primer movimiento el azar o la naturaleza elige el tipo del vendedor entre el conjunto de tipos posibles (en nuestro caso entre  $V_1$  y  $V_C$ ) y sólo es revelado al propio vendedor. Por tanto, los compradores desconocen a cual de los dos tipos pertenece el vendedor del que sólo conocen su distribución de probabilidad (que este caso se resume en el parámetro  $\phi$ ). Como es frecuente en Teoría de Juegos (aunque no se encuentra libre de controversia) suponemos que todos los compradores tienen las mismas conjeturas sobre las probabilidades de que el vendedor pertenezca a cada uno de los dos tipos.

En este tipo de modelos, el equilibrio, además de una combinación de estrategias, necesita de un sistema de conjeturas (que ya no serían triviales como ocurría cuando asumíamos que el tipo de vendedor era conocido) que tiene que cumplir una serie de requisitos. En el Anexo 3 describimos la obtención de un Equilibrio Bayesiano Perfecto cuando el vendedor realiza un única venta. A continuación realizamos algunos comentarios sobre ese equilibrio:

- a) El vendedor  $V_1$  “incumple” y el  $V_C$  “cumple” con independencia de las pujas ganadoras. Por su parte, los compradores presentan sus pujas de acuerdo a la función de puja  $B^\mu(v_i, \mu) = [V_{min}(\mu+1) + v_i] / (\mu+2)$  que se obtiene en el mencionado Anexo 3.

Esta función de puja depende, además de la valoración de cada comprador, del parámetro  $\mu$  que es la conjetura que realizan los compradores sobre la posibilidad de incumplimiento del vendedor. En el Anexo 3 se describe como la conjetura que cumple con los requisitos de un EBP sería simplemente,  $\mu = \phi$  (ya que con una única venta los compradores no tienen la oportunidad de conocer el comportamiento del vendedor en el pasado). Es decir, la probabilidad que adjudican los compradores de que el vendedor incumpla sería igual a la probabilidad de que el vendedor sea del tipo  $V_1$ .

Se puede observar que  $B^\mu(\cdot)$  es una función de puja más general que las funciones  $B^C(\cdot)$  y  $B^I(\cdot)$  obtenidas en los apartados anteriores ya que las incluye como casos particulares. Así, si  $\mu = 0$  (es decir, si los compradores asumen que el vendedor cumplirá con certeza), entonces,  $B^\mu(v_i, 0) = [V_{min} + v_i] / 2 = B^C(v_i)$ . Y, por su parte, si los compradores asignan a la opción de que el vendedor incumpla unas probabilidades igual a 1 ( $\mu = 1$ ), entonces,  $B^\mu(v_i, 1) = (2 V_{min} + v_i) / 3 = B^I(v_i)$ .

- b) Como característica de este equilibrio podemos destacar que “ex ante” el precio esperado por los compradores, en caso de ganar, va a ser el mismo que cuando existía certidumbre

sobre el tipo del vendedor. Es decir, cuando el tipo de vendedor era conocido (y para los tres tipos que habíamos considerado) los compradores presentaban sus pujas de tal manera que finalmente el precio esperado, en caso de ganar, era el mismo. Pues bien, cuando existe incertidumbre sobre el tipo de vendedor la estrategia de puja de equilibrio,  $B^{\mu}(\cdot)$ , permite que, desde el punto de vista de los compradores el precio esperado siga siendo el mismo. De esta manera, para compradores neutrales al riesgo no se produciría una modificación entre su utilidad esperada en los modelos considerados, tanto cuando tenían certeza como cuando no conocen el tipo de vendedor.

- c) Sin embargo, no ocurre lo mismo con el vendedor, al menos una vez que él ya conoce su tipo. Así, cada tipo de vendedor factible va a obtener, dadas las estrategias jugadas en equilibrio, un precio esperado diferente. Así, el precio esperado del tipo de vendedor  $V_C$  será inferior al que obtenía en el modelo con certeza, mientras que en el caso del vendedor tipo  $V_I$  la situación va a ser la contraria, su precio esperado va a ser superior. Como el ganador en media espera pagar lo mismo que cuando existía certeza, este resultado implica que la introducción de incertidumbre origina un “traspaso” de ingresos esperados desde el tipo de vendedor  $V_C$  (el que siempre “cumple”) al tipo de vendedor  $V_I$  (el que siempre “incumple”). Desde este punto de vista el tipo  $V_C$  preferiría encontrarse en una situación en la que los compradores conocieran su tipo mientras que lo contrario ocurriría con el tipo  $V_I$ .
- d) Adicionalmente, el precio esperado por ambos tipos de vendedores tiene una relación negativa con el valor de la conjetura de los compradores,  $\mu$ , lo que implica que ambos tipos verían incrementados sus ingresos si se redujera la probabilidad que los compradores asignan a que el vendedor vaya a incumplir. De esta manera, antes de comenzar la subasta ambos tipos de vendedores estarían interesados en hacer creer que pertenecen al tipo  $V_C$ . Evidentemente, los compradores verían con escepticismo los posibles intentos por parte del vendedor para convencerles de que pertenece al tipo  $V_C$  si no fueran acompañados por mecanismos que los dotaran de credibilidad.
- e) En todo caso, el juego de etapa cumple con los requisitos del Teorema del Ingreso Equivalente (en equilibrio, gana siempre el comprador con una mayor valoración; y un hipotético comprador que tuviera la valoración mínima obtendría una utilidad igual a cero). Por tanto, de acuerdo con ese teorema los ingresos esperados para el vendedor deberían ser los mismos que cuando no existía incertidumbre sobre el tipo de vendedor. Esto se cumple para un vendedor que todavía no conoce su tipo (es decir, antes de que la naturaleza haya realizado el movimiento en el que asigna tipo al vendedor).

No obstante lo interesante de este modelo es analizar las interacciones que se pueden producir cuando el juego se repite. Así, los compradores que se van presentando a cada venta van a elaborar sus conjeturas sobre a que tipo pertenece el vendedor, no sólo con la distribución inicial, sino también con la información que se deriva del comportamiento del vendedor en las ventas anteriores. En este contexto tanto la especificación de las estrategias como el sistema de conjeturas se hace más complejo. Nos centramos en aquellos equilibrios de agrupación<sup>46</sup> en los que el tipo  $V_I$  (el que incumple siempre cuando sólo realiza una venta) imite al tipo  $V_C$  y, por tanto, ambos tipos “cumplan”. Con ello, el tipo  $V_I$  evitaría incurrir en los costes de incumplir,  $K$ .

- f) Un resultado previo en este modelo repetido es que cuando el tipo  $V_I$  “incumple” revela su tipo (ya que el tipo  $V_C$  no tiene incentivos para incumplir). Por tanto, sólo tendría la oportunidad de sorprender al mercado en una ocasión.

---

<sup>46</sup> En nuestro caso, los equilibrios de agrupación son aquellos en los que, en la senda de equilibrio, los dos tipos de vendedor ejecutan la misma acción (al menos en un número “elevado” de ventas). Por su parte, en los equilibrios de separación cada tipo de vendedor realiza un acción diferente.

- g) Cuando **el juego se repite indefinidamente**, podemos especificar una combinación de estrategias y un sistema de conjeturas que, en la senda de equilibrio, generan el resultado de que ambos tipos de vendedor “cumplen”. Para que esta combinación forme parte de un Equilibrio Bayesiano Perfecto se tendría que cumplir la misma condición (2.) reproducida anteriormente en el apartado 4.3.-. Por tanto, en este caso el vendedor  $V_I$  conseguiría ocultar su tipo imitando indefinidamente al tipo  $V_C$  con lo que consigue no incurrir en los costes de incumplir. Para conseguirlo la mencionada condición (2.) sugeriría que el tipo de vendedor  $V_I$ , cuando va a ejecutar un número “elevado” e indefinido de ventas, estaría interesado en un proceso de venta “intenso” en el que el espacio de tiempo transcurrido entre venta y venta fuera reducido. Esta manera de actuar, en este contexto, le permitiría ganar “credibilidad” en relación con la alternativa de realizar un proceso “pausado”.
- h) En el modelo con incertidumbre sobre los tipos del vendedor es especialmente interesante analizar si, cuando **el juego se repite un número de veces finito y conocido**, se puede sostener un equilibrio en el que el tipo  $V_I$  “cumpla” (al menos en un número importante de ventas y lo “suficientemente” alejadas de la última venta). Obtenemos una condición que es suficiente para sostener conceptos de equilibrio menos exigentes que el EBP tales como el Equilibrio de Nash y el Equilibrio Bayesiano de Nash (y también de manera trivial el Equilibrio Perfecto en Subjuegos):

$$K \geq [(V^{max} - V^{min}) (\delta - 1)(4\delta^M(\varphi - 1) + 3\delta(\varphi + 2))] / [12(\varphi + 2)(\delta^M - \delta)]$$

donde  $\delta$  es la tasa de descuento. Del análisis de esta condición obtenemos que cuanto mayor sea el número de ventas ( $M$ ) a ejecutar más probable será su cumplimiento.

En todo caso, la noción de equilibrio más aplicable a nuestro modelo no sería ninguna de las anteriores sino la de Equilibrio Bayesiano Perfecto. El resultado que obtenemos es que en el modelo con incertidumbre sobre el vendedor cuando el número de ventas es finito y conocido no conseguimos soportar un EBP en el que el tipo  $V_I$  cumpla<sup>47</sup>. Por tanto, en este caso el tipo  $V_I$  no podría ahorrarse los costes de incumplir como ocurría en el punto g) anterior en el que el número de ventas era infinito o indefinido.

Este último resultado sugiere que el vendedor tipo  $V_I$  podría estar interesado en generar incertidumbre sobre el número total de operaciones que finalmente vaya a ejecutar, ya que ello le podría permitir transformar un juego con un número de ventas conocido en un juego con un número de ventas indefinido. De este modo podría aspirar al equilibrio expuesto en el punto g) anterior (en el que siempre cumple y los compradores presentan pujas altas) que le reporta mayor utilidad.

## 5. CONCLUSIONES

En las últimas dos décadas del siglo XX la Teoría de Subastas ha experimentado un importante desarrollo y se puede considerar como una auténtica rama con entidad propia dentro de la Teoría Económica.

En el presente trabajo después de describir los principales tipos de subastas y de revisar la importancia de las subastas en diferentes momentos históricos se realiza una revisión de la literatura teórica de subastas y de algunos de sus principales resultados. Posteriormente partiendo de la Teoría de Subastas se plantea un modelo de “reputación” del vendedor.

<sup>47</sup> Al menos cuando los dos tipos de vendedores están utilizando estrategias puras, es decir, que no utilizan un mecanismo aleatorio para tomar sus decisiones.

Antes de comentar la corriente “principal” de la Teoría de Subastas se comentan dos enfoques alternativos. El primero sería el enfoque de pujas competitivas (“competitive bidding”) que presenta un método para determinar las pujas óptimas en una subasta con sobre cerrado al primer precio. Una de las claves del modelo es que para calcular la puja óptima es necesario analizar las pautas de comportamiento que han seguido los competidores en procesos anteriores. Por tanto, se asume que los competidores tienen un comportamiento “dado” contenido en las reglas que, supuestamente, han utilizado en el pasado para presentar sus pujas.

Por tanto, este enfoque considera que existe un único competidor “estratégico”: el que analiza el comportamiento de los demás. De esta manera, no se analiza la cuestión de si el resultado obtenido podría formar parte de algún concepto de equilibrio. Con este enfoque surge la siguiente cuestión: si asumimos que una empresa es estratégica y que calcula su puja en función de cómo espera que se comporten las demás ¿cuáles son las razones para asumir que sus competidores no son también estratégicos?. Este es el principal cambio que introduce la Teoría de Juegos.

El otro enfoque no principal sería el que, utilizando la Teoría de Juegos, asume que las valoraciones de los compradores (o las cantidades máximas que están dispuestos a pagar) son de dominio público. De esta manera, en estos modelos, un comprador, cuando calcula su puja óptima no sólo conoce su valoración sino también la de sus competidores. Este supuesto no va a ser el utilizado por la mayor parte de los desarrollos de la Teoría de Subastas. Además, sería precisamente el desconocimiento por parte del vendedor de las valoraciones de los compradores lo que, desde un punto de vista teórico, justificaría la realización de una subasta.

Es decir, si las valoraciones de los compradores son de dominio público, el vendedor simplemente podría realizar una oferta a aquel que tuviera una valoración más alta, a un precio ligeramente inferior a su valoración, acompañada por una “amenaza” de no vender la empresa en el caso de que la rechazara (estas ofertas reciben el nombre de “take-it or leave-it”). Si el vendedor tiene capacidad de “autocompromiso” — tal y como supone, en general, la Teoría de Subastas — entonces la amenaza es “creíble” y el vendedor conseguiría extraer, prácticamente, todas las ganancias del intercambio. Por tanto, en este caso, no necesitaría organizar una subasta.

Por tanto, el cuerpo central de la Teoría de Subastas va a utilizar la Teoría de Juegos pero asumiendo que las valoraciones (o la señal sobre el valor, en los modelos con valoraciones comunes) de los compradores son información privada. En este caso, la capacidad del vendedor de extraer el excedente del intercambio se encuentra más limitada.

Cuando analizamos la Teoría de Subastas y en una primera aproximación podríamos obtener el resultado de que el vendedor no tendría incentivos a evaluar y analizar diferentes diseños de subastas ya que uno de los resultados principales (el “Teorema del Ingreso Equivalente”) establece que con los cuatro tipos de subastas básicas (ascendente, descendente, al primer precio y al segundo precio) se obtienen los mismos ingresos esperados. De esta manera, un vendedor neutral al riesgo sería indiferente entre esos cuatro tipos de subastas. Es más, otro resultado (que se obtiene de la literatura de subastas óptimas) establece que con cualquiera de las subastas simples el vendedor lograría maximizar sus ingresos esperados. Por tanto, con estos resultados un vendedor no necesitaría dedicar esfuerzos para analizar que diseño de subastas se adapta mejor a su objetivo de maximizar sus ingresos esperados.

No obstante para sostener los resultados comentados en el párrafo anterior sería necesario que se mantengan los supuestos asumidos por el llamado “Modelo de Referencia”. Precisamente, una gran parte de la literatura teórica de subastas se ha desarrollado sustituyendo o relajando uno o varios de esos supuestos. Cuando ocurre esto, el resultado que se obtiene es que, en general, el Teorema del Ingreso Equivalente ya no se sostiene y que el diseño óptimo ya no se puede alcanzar con los diseños simples de subastas. De esta manera, dependiendo de los contextos en

que nos encontremos, con un determinado tipo de subastas esperaríamos obtener unos mayores ingresos que con otras y, por tanto, aquí ya sí sería relevante la preocupación por parte del vendedor de cual tipo de subasta “a priori” puede ser más interesante. Por su parte, cuando se levanta alguno de los supuestos del “Modelo de Referencia” nos encontramos que para encontrar el diseño óptimo se plantea el problema de la complejidad que puede revestir lo que, en la práctica, provoca que las subastas óptimas sean difíciles de calcular y de implementar.

La literatura de subastas también desarrolla diferentes modelos en que los compradores repiten y analiza las posibilidades de que los compradores con sus pujas en las primeras compras puedan influir en las pujas de sus competidores en las siguientes ocasiones. De esta manera, se plantea la posibilidad de que los compradores, en determinados contextos, puedan estar interesados en forjarse una determinada reputación (que en algunas ocasiones podría ser de pujador “débil” y en otras de pujador “fuerte”) con el objetivo de incrementar sus ganancias esperadas en las siguientes ventas.

En el apartado cuatro, partiendo de la Teoría de Subastas, se plantea un modelo en el que se intenta trasvasar el énfasis desde la reputación de los compradores hacia la reputación del vendedor. Para ello, suponemos que mientras el vendedor realiza varias ventas los compradores se presentan en un única ocasión aunque conocen el comportamiento del vendedor en las ventas anteriores. Asimismo, en nuestro modelo los compradores se enfrentan a una incertidumbre sobre las normas que finalmente se aplicarán en el proceso de venta que están participando. Para ello, a diferencia de lo que normalmente asume la Teoría de Subastas, suponemos que nuestro vendedor carece de capacidad de autocompromiso.

Analizamos diversos “tipos” de vendedores en diferentes contextos y obtenemos que para algunos de ellos se obtendrían los mismos resultados que si tuvieran capacidad de comprometerse por adelantado. Sin embargo, para alguno de los tipos de vendedor contemplados el resultado sería inferior. Por tanto, este tipo de vendedor podría tener incentivos para adoptar mecanismos que le dotasen de credibilidad permitiéndole, así, alcanzar los equilibrios superiores. Algunos de los resultados obtenidos sugieren que la puesta en marcha de un proceso intenso de ventas (en el que el tiempo que transcurre entre una venta y la siguiente es reducido) o prácticas que tiendan a no revelar o a generar incertidumbre sobre el número exacto de ventas que va a realizar podrían ayudar a ese objetivo.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Bikhchandani, S. (1988), "Reputation in Repeated Second-Price Auctions", *Journal of Economic Theory*, 46, 97-119.
- Bulow, J., Huang, M., y Klemperer, P. (1999), "Toeholds and Takeovers", *Journal of Political Economy*, 107(3), 427-454.
- Capen, E. C., Clapp, R. V., y Campbell, W. M. (1971), "Competitive Bidding in High-Risk Situations", *Journal of Petroleum Technology*, 23, 641-653.
- Cassady, R. (1967), *Auction and Auctioneering*, University of California Press, Berkeley.
- CCP, (1999, 2000, 2001, 2002 2003), *Informe de Actividades*, Consejo Consultivo de Privatizaciones, Madrid
- Cuervo, A. (1997), *La Privatización de la Empresa Pública*, Ediciones Encuentro, Madrid.

- Durá, P. (2002), *Teoría de Subastas y Privatizaciones: Un modelo de reputación del vendedor*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Durá, P. y Serrano, B. (2002), "Consecuencias del 11-S sobre las operaciones de fusión y adquisición de empresas (M&A)". In A. L. López Roa (Ed.), *La Crisis del 11 de septiembre ¿Qué cambiará?*, ESIC y Universidad Rey Juan Carlos, Madrid.
- Friedman, L. (1956), "A Competitive Bidding Strategy", *Operations Research*, 4, 104-112.
- Fudenberg, D., y Tirole, J. (1991), *Game Theory*, The MIT Press,
- Gámir, L. (1999), *Las Privatizaciones en España*, Pirámide, Madrid.
- Gibbons, R. (1992), *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, Princeton
- Harsanyi, J. (1967), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Parts I - III", *Management Science*, 14(3), 159-182, 320-334, 486-502.
- Hendricks, K., y Porter, R. (1989), "Collusion in Auctions", *Annales D'Économie Et de Statistique*, 15/16, 217-230.
- Klemperer, P. (1999), "Auction Theory: A Guide to the Literature", *Journal of Economic Surveys*, 13(3), 227-286.
- Klemperer, P. (2000), *What really matters in auction design?*, [www.paulklemperer.org](http://www.paulklemperer.org)
- Klemperer, P. (2003), "Why Every Economist Should Learn Some Auction Theory", en M. Dewatripont, L. Hansen and S. Turnovsky (eds.), *Advances in Economics and Econometrics: Invited Lectures to 8th World Congress of the Econometric Society*, Cambridge University Press, 2003
- Kreps, D. (1990), *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press,
- Laffont, J. (1997), "Game Theory an Empirical Economics: The Case of Auction Data", *The European Economic Review*, 41, 1-35.
- Maskin, E., y Riley, J. (1984), "Optimal Auctions with Risk Averse Buyers", *Econometrica*, 52(6), 1473-1518.
- Matthews, S. (1979), *Risk Aversion and the Efficiency of First and Second Price Auctions*, Working Papers, Dept. of Economics, University of Illinois
- Matthews, S. (1983), "Selling to Risk Averse Buyers with Unobservable Tastes", *Journal of Economic Theory*, 30(2), 370-400.
- McAfee, P., y McMillan, J. (1987), "Auctions and Bidding", *Journal of Economic Literature*, XXV(2), 699-738.
- McAfee, P., y McMillan, J. (1992), "Bidding Rings", *The American Economic Review*, 82(3), 579-599.
- Mead, W. J., Moseidjord, A., & Sorensen, P. E. (1984), "Competitive Bidding Under Asymmetrical Information: Behaviour and Performance in Gulf of Mexico Drainage Lease Sales, 1959-1969", *Review of Economics and Statistics*, 66, 505-508.

- Milgrom, P., y Weber, R. J. (1982), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", *Econometrica*, 50(5), 1089-1122.
- Myerson, R. B. (1981), "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operation Research*, 6(1), 58-73.
- Ortega-Reichert, A., (1968), *Models for Competitive Bidding under Uncertainty*, PhD thesis, Stanford University.
- Riley, J., y Samuelson, W. (1981), "Optimal Auctions", *The American Economic Review*, 71(3), 381-392.
- Roth, E., y Ockenfels, A., (2000), *Last Minute Bidding and the Rules for Ending Second-Price Auctions: Theory and Evidence form a Natural Experiment on the Internet*, (7729), NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research
- Rothkopf, M., Teisberg, T., y Kahn, P. (1990), "Why Are Vickrey Auctions Rare?", *Journal of Political Economy*, 98, 94-109.
- Schelling, T. (1960), *The Strategy of the Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.
- Shubik, M. (1983), "Auctions, Bidding, and Market: An Historical Sketch". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Theory* (pp. 33-52), New York University Press, New York.
- Stark, R. M. (1971), "Competitive Bidding Strategy", *Operations Research*, 19, 484-490.
- Stark, R. M., y Rothkopf, M. (1979), "Competitive Bidding: A Comprehensive Bibliography", *Operations Research*, 27, 364-390.
- Vickers, J., y Yarrow, G. (1988), *Privatization: An Economic Analysis*, The MIT Press,
- Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, 16(1), 8-37.

## ANEXOS

### Anexo 1: Información completa en subastas al primer precio

En el caso de juegos estáticos con información completa el desarrollo temporal del juego se podría describir de la siguiente manera: **1)** los jugadores adoptan sus acciones simultáneamente y **2)** cada uno recibe sus ganancias en función de las acciones tomadas por todos los jugadores. Aplicado a una subasta con sobre cerrado al primer precio en **1)** los potenciales compradores presentan sus pujas y en **2)** el ganador recibe el bien y paga el precio incluido en su propia puja (el resto de jugadores no recibe ni paga nada).

Para tener bien especificado el juego tendríamos que definir que es lo que “saben” los jugadores en el momento que toman su decisión, cuales son sus acciones factibles y cuales serían sus funciones de ganancias. En lo que se refiere a lo primero, suponemos que los potenciales compradores conocen las reglas de la subasta y actúan con la certeza de su aplicación. Adicionalmente, los pujadores conocen cómo ellos valoran el objeto que se está subastando. Esta valoración (a la que llamaremos  $v_i$  para el jugador  $i$ ) será el máximo precio que estaría dispuesto a pagar<sup>48</sup> y, en general, será diferente para cada participante. Por último, el supuesto de la información completa implica que todos los jugadores conocen exactamente como sus competidores valoran la empresa (o el bien) en venta. En relación con sus acciones factibles vamos a suponer que sólo pueden presentar pujas no negativas<sup>49</sup> en unidades monetarias enteras (a la puja del jugador  $i$  la denominaremos  $b_i$ ). Por tanto, el espacio de sus estrategias serían los números enteros no negativos.

Las ganancias del jugador  $i$ , si gana la subasta, vendrían determinadas por la diferencia entre el valor que para él tiene la empresa ( $v_i$ ) y lo que paga por ella ( $b_i$ ). Si no gana la subasta su beneficio será cero<sup>50</sup>. Esto supone que la puja no sólo va a influir en las probabilidades de ganar sino que también va a determinar el precio a pagar en caso de obtener la empresa. Por tanto, desde el punto de vista de los compradores a mayor puja presentada mayores probabilidades de ganar pero menores ganancias en caso de resultar vencedores.

En las subastas al primer precio se puede observar que la estrategia consistente en presentar una puja igual a su valoración ( $b_i=v_i$ ) es una estrategia dominada debido a que existe alguna estrategia (por ejemplo,  $b_i=v_i-x$ , siendo  $x$  un valor entero positivo e inferior a  $v_i$  para evitar pujas negativas) con la cual el jugador  $i$  (ante cualquier estrategia del resto de jugadores) al menos estará igual y en algún caso estará mejor. Esto es fácil de demostrar ya que con  $b_i=v_i$  el beneficio obtenido es siempre igual a cero (si pierde no obtiene el objeto y si gana paga un precio exactamente igual a su valoración con lo que su excedente también es cero), mientras que con la estrategia  $b_i=v_i-x$  tiene una probabilidad positiva de obtener ganancias mayores que cero y nunca obtendría una utilidad negativa.

De igual modo, las estrategias que suponen presentar pujas superiores a la valoración también ( $b_i > v_i$ ) también están dominadas, ya que en el mejor de los casos (cuando no gana la subasta) las ganancias serán cero y cuando se adjudica el bien obtendría unas ganancias negativas. Por lo tanto, en una subasta al primer precio, al eliminar los equilibrios donde se jueguen estrategias dominadas estaríamos descartando la posibilidad de que los compradores presenten pujas iguales o superiores a su valoración. De esta manera, en este tipo de subastas no esperaremos que los compradores presenten pujas ofreciendo lo máximo que estén dispuestos a pagar sino cifras inferiores (veremos que este hecho puede ofrecer incentivos al vendedor para intentar “renegociar” una vez que la pujas estén presentadas).

Utilizando el concepto de eliminación iterativa de estrategias dominadas aunque, en este caso, no sería suficiente para encontrar un equilibrio (a diferencia de lo que ocurriría en las subastas al segundo precio y en las subastas inglesas) si podríamos eliminar estrategias adicionales: para el candidato con una valoración más alta ( $v_1$ ) podríamos eliminar en una segunda ronda aquellas pujas que se encuentren por debajo de su valoración pero por encima de la valoración del candidato con la segunda valoración más alta ( $v_2$ ). Es decir, para el candidato con valoración más alta las pujas que se encontraran por encima de la valoración de su competidor ( $b_1 > v_2$ ) también estarían dominadas (una vez que se hubieran eliminado para su competidor las estrategias por encima de su valoración). Por tanto, tampoco esperaríamos

---

<sup>48</sup> Dicho de otra manera, los compradores serían indiferentes entre adquirir el bien a un precio igual a su valoración y no adquirir el bien. Si pagaran un precio superior obtendrían una utilidad negativa.

<sup>49</sup> En algunas ocasiones, como cuando se trata de empresas deficitarias, puede ocurrir que las pujas sean negativas (normalmente se oferta un precio positivo pero con la condición de que el vendedor tenga que hacerse cargo de un volumen de deuda que puede superar el precio). En nuestro caso descartaremos las pujas negativas.

<sup>50</sup> Para tener previstas todas las opciones supondremos que en caso de empate se realizará un sorteo con igualdad de probabilidades para los candidatos que hayan presentado las pujas mayores.

que el candidato con la valoración más elevada presentara una puja por encima de la valoración de su rival más cercano.

En los juegos de estas características se recurre al concepto de Equilibrio de Nash para encontrar las estrategias de equilibrio. Un Equilibrio de Nash está constituido por una combinación de estrategias (una para cada jugador) tal que a ninguno de los jugadores les compensara desviarse dadas las estrategias que están jugando los demás. En este juego con información completa la estrategia de cada jugador estaría constituida simplemente por un puja. En esta definición de Equilibrio de Nash podrían entrar estrategias dominadas por lo que es frecuente añadir el refinamiento de considerar sólo aquellos Equilibrios de Nash que no incluyan una estrategia dominada. Esta será la convención que usemos en los párrafos siguientes. Aun así cuando aplicamos esta definición al juego de una subastas al primer precio con información completo (y con pujas discretas) nos encontramos con que aparecen múltiples equilibrios

A modo de ejemplo, vamos a suponer que sólo existen dos compradores y analizaremos los Equilibrios de Nash en varios casos. Consideraremos tres casos: **a)** el comprador  $i$  valora la empresa en venta en una unidad más que el comprador  $j$  (es decir,  $v_i = v_j + 1$ ); **b)** los dos compradores tienen la misma valoración ( $v_i = v_j$ ); y **c)** el comprador  $i$  tiene una valoración superior al comprador  $j$  en al menos 2 unidades ( $v_i \geq v_j + 2$ ).

➤ En el caso **a)**, si los dos jugadores realizan una puja una unidad inferior a sus respectivas valoraciones (es decir,  $b_i = v_i - 1 = v_j$  y  $b_j = v_j - 1$ ) la combinación de ambas estrategias ( $b_i^*$ ,  $b_j^*$ ) es un Equilibrio de Nash. Para comprobarlo habría que mostrar que, dado el comportamiento de su competidor, ninguno de los dos puede mejorar realizando otra oferta. Por un lado, el jugador  $i$  obtiene la empresa, ya que su puja es mayor, y obtiene una ganancia igual a una unidad monetaria mientras que con ninguna otra estrategia obtendría un beneficio superior a uno. Así, si ofrece más que  $v_i - 1$  sigue obteniendo la empresa pero lógicamente su beneficio será menor ya que el precio pagado será mayor. Si presenta una puja menor tampoco obtiene unas ganancias superiores a 1: si ofrece  $b_i = v_i - 2$  empataría con el jugador 2 y habría que sortear la empresa, siendo su beneficio esperado igual a 1; y si ofrece una cantidad inferior a  $v_i - 2$  no obtendría la empresa y su beneficio sería cero. Por lo tanto, el jugador  $i$  no tendrá incentivos para desviarse de este equilibrio ya que, dada la estrategia del jugador  $j$ , en ningún caso obtendría una mejora. Del mismo modo podemos observar que el jugador  $j$  tampoco puede mejorar sus ganancias (que son iguales a cero al no conseguir la empresa). Así, si ofrece menos sus ganancias serían igualmente cero ya que obviamente seguiría sin conseguir la empresa, y si ofrece más podría conseguir la empresa pero el beneficio nunca sería positivo porque se vería obligado a pagar la cantidad en que valora la empresa  $v_j$  (en cuyo caso no hay excedente y el beneficio sigue siendo cero) o una cantidad mayor que  $v_j$  en cuyo caso sus ganancias serán negativas.

Hemos visto que la combinación de estrategias ( $v_i - 1$ ,  $v_j - 1$ ) en el caso a) es un Equilibrio de Nash aunque no es el único. Así, con el razonamiento anterior se podría demostrar que la combinación de pujas  $b_i = v_i - 2$  ( $= v_j - 1$ ) para el jugador  $i$  y  $b_j = v_j - 1$  para el jugador  $j$  también forman un Equilibrio de Nash.

Podríamos, también, destacar la *atracción* que tiene la segunda valoración más alta (en este caso  $v_j$ ) para la puja del candidato con una valoración más elevada (lo que también ocurre en los dos casos siguientes). Una consecuencia es que el precio final del intercambio tendería a situarse en la proximidad de esa segunda valoración más alta (de hecho en el primero de los equilibrios anteriores el precio coincidía con ella mientras que en el segundo, el precio se situaría una unidad por debajo<sup>51</sup>).

➤ En el caso **b)** — cuando  $v_i = v_j$  — se puede mostrar que tanto la combinación de estrategias ( $b_i = v_i - 1$ ,  $b_j = v_j - 1$ ) como ( $b_i = v_i - 2$ ,  $b_j = v_j - 2$ ) constituyen sendos Equilibrios de Nash. Podemos destacar que este sería el único caso en el que los dos candidatos son iguales y que en cada uno de los equilibrios las estrategias de los jugadores son simétricas. Hay que tener en cuenta que, en general, este modelo es un modelo asimétrico ya que “ex ante” es conocido que los jugadores son distintos (cada uno tiene su propia valoración) con la única excepción de este caso b) en el que las valoraciones de todos coinciden. (En el apartado 3.2.- veremos que en el extendido “modelo de referencia” aunque “ex -post” los jugadores sean diferentes, normalmente, se realizan formulaciones en las que “ex -ante” son simétricos).

➤ Por último, en el caso **c)** — en el que ocurría que ( $v_i \geq v_j + 2$ ) — podemos observar que, también, la estrategia para el jugador con una valoración más alta (en este caso el  $i$ ) con la que presenta una puja igual a la valoración de su rival forma parte de un Equilibrio. En concreto, el par de estrategias ( $b_i = v_i$ ,  $b_j = v_j - 1$ ) constituyen una mejor respuesta para cada jugador dada la estrategia del contrario y, por tanto, forman parte de un Equilibrio de Nash.

## Anexo 2: Obtención de las funciones $B^l(\cdot)$ y $P^l(\cdot)$ .

En el texto se comentan los dos pasos que proponemos seguir (primero calcular el intervalo factible y después elegir el punto medio) para obtener la función  $P^l(b_1)$ . En este apéndice, siguiendo este procedimiento obtendremos simultáneamente  $P^l(b_1)$  y la función de puja que utilizarían los compradores cuando conocen con certeza que el vendedor va a incumplir (a la que llamaremos  $B^l(b_1)$ ). Para ello, en este anexo asumiremos que  $K=0$ . Esto implica que el vendedor siempre incumplirá ya que obtendrá un mejor precio sin incurrir en ningún coste.

<sup>51</sup> Naturalmente este último resultado es sensible a los intervalos en que se permitan realizar las pujas.

El límite inferior del intervalo factible para la negociación es la puja del ganador,  $b_1$ , ya que este sería el precio que el vendedor tendría asegurado si eligiese la opción de “Cumplir”.

Para calcular el límite superior tendríamos que conocer cual es la función de puja que, en equilibrio, estarían utilizando los compradores. Conociendo dicha función podríamos calcular, a partir de la puja presentada, la valoración que el comprador tiene de la empresa mediante la inversa de la función de puja. El problema reside en que la función de puja que utilicen los compradores estará en función de la función de precio,  $P^l(b_1)$ . Por tanto, para obtener la función de precio necesitamos calcular el límite superior del intervalo factible, para lo cual tendremos que conocer la función de puja, que a su vez dependerá de la función de precio. Esto supone que necesitaremos resolver el problema de maximización al que se enfrentan los compradores para obtener simultáneamente ambas funciones.

El límite superior del intervalo factible lo podemos expresar de una manera genérica como  $v_1=B^{-1}(b_1)$ , siendo  $B^{-1}(\cdot)$  la inversa de la función de puja. Es decir, la valoración del ganador,  $v_1$ , es una función de su puja,  $b_1$ . De esta manera, el intervalo dentro del cual se podría culminar la negociación vendría dado  $[b_1, B^{-1}(b_1)]$ .

A partir de dicho intervalo podríamos expresar el precio como una función genérica que puede tomar cualquier punto de ese intervalo:

$$(3.) \quad P^l(b_1) = \alpha b_1 + (1-\alpha)B^{-1}(b_1), \quad \text{donde } \alpha \in [0,1].$$

Cuando  $\alpha=1$  nos encontramos con que  $P^l(b_1)=b_1=P^c(b_1)$ . Es decir, el precio en caso de “Incumplir” coincidiría con el precio que se obtendría en el caso de “Cumplir”.

De esta manera, para un comprador,  $i$ , el precio a pagar, en caso de resultar ganador, vendría dado por la ecuación anterior (ya que en este caso su puja sería la  $b_1$ ). Para razonar en términos de un comprador genérico sustituiremos el subíndice 1 por el subíndice  $i$ . De esta manera, de la ecuación anterior podemos obtener la derivada de la función del precio respecto a la puja:

$$(4.) \quad dP^l(b_i)/db_i = \alpha + (1-\alpha)/B'(v_i)$$

Teniendo en cuenta estos hechos los compradores para calcular su puja maximizarán su utilidad esperada. Esta expresión vendría dada por el excedente obtenido en caso de ganar (que en caso de pagar un precio igual a la puja sería  $(v_i-b_i)$ ) multiplicado por las probabilidades de ganar con la puja presentada (que como estamos suponiendo que sólo se presentan dos compradores sería  $Prob(b_i > b_j)$ ). Así,

$$\text{Utilidad esperada del comprador } i: \quad U_i^e = (v_i - b_i) Prob(b_i > b_j)$$

Si suponemos que en lugar de pagar la puja que presenta ( $b_i$ ) tendrá que pagar el precio que venga determinado por  $P^l(b_i)$  contenida en (3.) entonces la expresión anterior quedaría:

$$(5.) \quad \text{Utilidad esperada del comprador } i: \quad U_i^e = (v_i - P^l(b_i)) Prob(b_i > b_j)$$

Para calcular las probabilidades de ganar tendríamos que realizar una conjetura sobre como el jugador  $i$  espera que se comporte su rival, el jugador  $j$ . Así, normalmente se asume que el comprador  $i$  realiza la conjetura de que su competidor va a presentar su puja de acuerdo a una regla de decisión arbitraria,

$$b_j = B_j(v_j) \quad \forall j \neq i.$$

Es decir, si su valoración (que es desconocida para  $i$ ) fuera  $v_j$  entonces presentaría una puja igual a  $B_j(v_j)$ . Esta regla de decisión sería arbitraria pero cumpliría dos requisitos: ser continua  $\forall v_j \in [V_{min}, V_{max}^*]$  y ser monótona creciente en  $v_j$  en dicho intervalo (es decir,  $dB/dv_j > 0$ )<sup>52</sup>. Estas propiedades son importantes ya que podemos asegurar sin ambigüedad que a mayor valoración mayor será la puja presentada. Adicionalmente, al ser monótona creciente nos aseguramos la existencia de la función inversa en todo el intervalo factible para las valoraciones. Es decir, esta función inversa nos representaría la valoración en función de la puja presentada. Así,  $v_j = B_j^{-1}(b_j) \quad \forall j \neq i$ , es decir,  $B^{-1}(b_i)$  sería la valoración que da lugar a la presentación de una puja igual a  $b_j$ .

En función de este supuesto sobre los competidores podríamos reformular la expresión  $Prob.(b_i > b_j)$  de la ecuación (5.) de la siguiente manera,  $Prob(b_i > b_j) = Prob [b_i > B_j(v_j)]$ . Si llamamos  $v_j^*$  a la valoración que haría que el jugador  $j$  presentará una puja igual a la del jugador  $i$  ( $b_i$ ), entonces  $v_j^* = B_j^{-1}(b_i)$ . Expresado de esta manera, la probabilidad de ganar que el jugador  $i$  tiene con la puja  $b_i$  será igual (dada la conjetura de que su competidor siguen la regla  $B_j(\cdot)$ ) a la probabilidad de que la valoración del jugador  $j$  se sitúe por debajo de la mencionada  $v_j^*$ . A su vez, la probabilidad de

<sup>52</sup> Dados los supuestos realizados se podría mostrar que estos requisitos se derivarían de la racionalidad de los compradores.

que la valoración de un jugador se sitúe por debajo de  $v_j^*$  vendría dada precisamente por la función de distribución de las valoraciones, es decir sería  $F(v_j^*)$ . Por tanto,

$$Prob(b_i > b_j) = Prob [b_i > B_j(v_j)] = F(v_j^*) = F[B_j^{-1}(b_i)]$$

Si asumimos que las valoraciones de los compradores se distribuyen uniformemente en el mismo intervalo  $[V_{min}, V_{max}]$  entonces la expresión anterior quedaría como:

$$Prob(b_i > b_j) = F[B_j^{-1}(b_i)] = (B^{-1}(b_i) - V_{min}) / (V_{max} - V_{min})$$

Sustituyendo este valor en (5.) podríamos expresar el problema de encontrar la mejor respuesta del jugador  $i$ , dada la regla de decisión arbitraria  $B_j(\cdot)$  utilizada por sus competidor, como:

$$(6.) \quad \underset{b_i}{Max} \quad U_i^e = (v_i - P^i(b_i)) [(B_j^{-1}(b_i) - V_{min}) / (V_{max} - V_{min})]$$

En esta expresión se ha eliminado las referencias a la puja de su competidor o a sus valoraciones, datos ambos no conocidos por el comprador  $i$  cuando presenta su puja. De esta manera, en (6.) sólo aparecen variables conocidas como los extremos del intervalo en que se distribuyen las valoraciones ( $V_{min}$  y  $V_{max}$ ), y su propia valoración ( $v_i$ ). También aparece la conjetura del jugador  $i$  sobre la regla de decisión de sus competidores (en este caso su inversa  $B_j^{-1}(\cdot)$ ) y, naturalmente, la variable para la cual se quiere encontrar solución, la propia puja ( $b_i$ ).

Así la condición de primer orden vendría dada por,

$$(dP^i(b_i)/db_i)[(B_j^{-1}(b_i) - V_{min}) / (V_{max} - V_{min})] = (v_i - P^i(b_i)) [(dB_j^{-1}(b_i)/db_i) / (V_{max} - V_{min})]$$

Si en esta condición de primer orden, introducimos las ecuaciones (3.) y (4.):

$$[\alpha + (1-\alpha)B_j'(v_i)][(B_j^{-1}(b_i) - V_{min}) / (V_{max} - V_{min})] = [v_i - \alpha b_i + (1-\alpha)B_j^{-1}(b_i)][(dB_j^{-1}(b_i)/db_i) / (V_{max} - V_{min})]$$

Hasta ahora nos hemos fijado en el comprador  $i$  y hemos supuesto una regla de decisión arbitraria ( $B_j(\cdot)$ ) que utilizaría su rival. No obstante en un Equilibrio Bayesiano de Nash todos los compradores deben estar maximizando simultáneamente y, por tanto, el uso de la función  $B_j(\cdot)$  por parte de los competidores de  $i$  debe ser consistente con que ellos mismos estén actuando racionalmente. Si a este hecho le añadimos el supuesto de simetría entre los compradores (que en nuestro caso implicaría que si dos pujadores tuvieran la misma valoración presentarían la misma puja) entonces la puja óptima del comprador  $i$  ( $b_i$ ) debería ser la que determine la propia regla de decisión  $B_j(\cdot)$  para la valoración  $v_i$ . Es decir, para que una puja,  $b_i$ , pueda formar parte de un Equilibrio de Nash<sup>53</sup> entonces tiene que cumplir que  $b_i = B_j(v_i)$  (por lo que podríamos quitar el subíndice y llamarla  $B(v_i)$ ). Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior,

$$[\alpha + (1-\alpha)B'(v_i)][v_i - V_{min}] / (V_{max} - V_{min}) = [v_i - \alpha B(v_i) - (1-\alpha)v_i] / [(V_{max} - V_{min}) B'(v_i)]$$

Ordenando términos y operando tenemos que

$$(7.) \quad B'(v_i) - B(v_i) / (V_{min} - v_i) = [\alpha(V_{min} - 2v_i) - V_{min} + v_i] / \alpha(V_{min} - v_i)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden del tipo  $dy/dt + u(t)y = w(t)$ ; cuya solución viene dada por  $y(t) = e^{-\int u dt} \left( A + \int w e^{\int u dt} dt \right)$ . En la ecuación (7.)  $y=B(v_i)$ ,  $t=v_i$ ,  $u=-1/(V_{min}-v_i)$  y  $w= [\alpha(V_{min} - 2v_i) - V_{min} + v_i] / \alpha(V_{min} - v_i)$ . Por tanto,

$$B(v_i) = e^{-\int \frac{-1}{V_{min}-v_i} dv_i} \left( A + \int w e^{\int \frac{-1}{V_{min}-v_i} dv_i} dv_i \right)$$

Operando en esta ecuación obtenemos la siguiente función de puja,

$$B(v_i) = [2A - \alpha v_i(2\alpha(V_{min}-v_i) - 2V_{min} + v_i)] / [2(v_i - V_{min})]$$

Donde  $A$  es la constante de la integración. Utilizando la condición límite de que  $B(V_{min})=V_{min}$  obtenemos que  $A = -V_{min}^2/2\alpha$ . Sustituyendo este valor en la ecuación anterior obtendríamos una expresión en que la puja además de

<sup>53</sup> Podemos utilizar aquí Equilibrio de Nash en lugar de EBN dado que todo EBN es un Equilibrio de Nash (aunque el inverso no es cierto).

ser una función de la valoración, depende del coeficiente  $\alpha$  (que es el que nos determinaba en que punto del intervalo factible se situaría la renegociación).

$$(8.) \quad b_i = B(v_i) = [(2\alpha - 1)/2\alpha] v_i + V_{min}/2\alpha$$

De esta manera, tendríamos diferentes posibilidades según cual sea el valor que los jugadores creen que tomará  $\alpha$  (recordamos que en nuestro modelo estamos suponiendo que tanto el vendedor como todos los potenciales compradores tienen la misma expectativa o la misma conjetura sobre cual será el valor más probable para este coeficiente).

➤ Cuando  $\alpha=1$  nos encontramos en el caso de que con certeza el precio se situaría en el mismo sitio que si se cumplieran las normas (es decir, aunque exista negociación el vendedor no será capaz de elevar el precio). Si los compradores conocen esto se comportarían de igual manera que lo hacían cuando el vendedor iba a cumplir con certeza. Efectivamente, si  $\alpha=1 \Rightarrow b_i = B(v_i) = (v_i + V_{min})/2 = B^C(v_i)$ , que es la misma función de puja que se obtenía (con estos supuestos) en el modelo de referencia y que se expresaba en la ecuación (1.). A esta función la llamaremos  $B^C(\cdot)$ .

➤ Cuando  $\alpha=1/2$  el precio se situaría justo en medio del intervalo factible, es decir, a igual distancia de la puja presentada que de la valoración que, en equilibrio, se deduciría de dicha puja. Este sería el valor de  $\alpha$  que, al menos, en principio podríamos postular como candidato para ser utilizado en nuestro modelo. Sin embargo, observamos que si introducimos este valor en la función de puja (8.) obtenemos que esta se transforma en una constante que coincide con el valor mínimo de la valoración que cualquier comprador podría tener. Es decir, si  $\alpha=1/2 \Rightarrow b_i = B(v_i) = V_{min}$ .

De esta manera, la puja de los potenciales compradores sería independiente de su valoración. Por tanto, en este caso no sería posible deducir la valoración a través de las pujas presentadas debido a que todas las valoraciones dan lugar a la misma puja. Esto implica que las pujas no son informativas para el vendedor. Interpretando este resultado podríamos decir que los compradores se comportan estratégicamente intentando no desvelar información que posteriormente sería utilizada de manera “desmedida” por el vendedor en su contra. Por ello, al utilizar, en equilibrio, esta función de puja constante provocan que el vendedor no obtenga ninguna información relevante de las pujas presentadas. De esta manera, el vendedor no obtendría ninguna utilidad de la subasta y para él este caso sería equivalente a no realizar la subasta e iniciar la negociación directamente desde el principio.

➤ Si  $\alpha < 1/2$ , se puede comprobar, analizando la ecuación (8.) que obtendríamos pujas inferiores a  $V_{min}$ , (lo que equivaldría a no presentarse).

Con estos resultados podríamos concluir que si el vendedor opta por plantear la subasta es debido a que espera que el coeficiente  $\alpha$  tome un valor superior a  $1/2$ , es decir espera que  $\alpha$  pertenezca al intervalo semiabierto  $(1/2, 1]$ . Suponemos que los potenciales compradores anticipan este razonamiento y, por tanto, realizarán la misma conjetura. De esta manera, este será el nuevo intervalo factible para el parámetro  $\alpha$ . Por tanto, el valor esperado para  $\alpha$  se situaría a mitad de camino entre los extremos del intervalo mencionado, es decir sería igual a  $3/4$ .

➤ Si  $\alpha=3/4$ , las pujas que, en equilibrio, presentarían los compradores cuando anticipan que el vendedor incumplirá vendrá dado, según la ecuación (8.), por:

$$(9.) \quad \text{si } \alpha=3/4 \Rightarrow b_i = B(v_i) = \boxed{v_i/3 + 2V_{min}/3 = B^I(v_i)}$$

Esta función de puja, a la que hemos llamado  $B^I(v_i)$ , será la que asumiremos que utilizarán los compradores cuando conozcan con certeza que el vendedor incumplirá. Una vez que tenemos la función de puja (así como el valor esperado de  $\alpha$ ) ya podemos calcular cual será la función del precio esperado, en el caso de que el vendedor incumpla. Teniendo en cuenta que, a partir de (9.),  $v_i = B^{-1}(b_i) = 3b_i - 2V_{min}$  y utilizando la ecuación (3.):

$$P^I(b_i) = \alpha b_i + (1-\alpha)B^{-1}(b_i) = 3/4 b_i + 1/4(3b_i - 2V_{min}), \text{ de donde,}$$

$$(10.) \quad \boxed{P^I(b_i) = 3b_i/2 - V_{min}/2}$$

Esta será la función de precios que utilizaremos cuando el vendedor opte por incumplir (tal y como aparece en el Cuadro 1 en el que se recogía el desarrollo temporal del juego).

### Anexo 3: Obtención de un EBP en el modelo con incertidumbre sobre el tipo de vendedor y con una venta

En este Anexo obtendremos un Equilibrio Bayesiano Perfecto cuando existe incertidumbre sobre el tipo de vendedor y este realiza una única venta. La función de puja que utilizarían los vendedores en este contexto formaría parte de dicho equilibrio.

Asumimos que cuando el vendedor “cumple” el precio es igual a la puja ganadora ( $P^C(b_1) = b_1$ ) mientras que cuando incumple viene dado por la función de precio obtenida en el Anexo 2 ( $P^I(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2$ ).

Para encontrar un EBP vamos a seguir varios pasos.

➤ **Paso primero.- Estrategia del vendedor.** Empezamos situándonos en la posición de cada uno de los dos tipos posibles de vendedor una vez que ya se han presentado las pujas. Según lo comentado en el apartado 4.3.- cada uno de esos dos tipos de vendedor tiene, en el juego con una única venta, una estrategia dominante. Además, estas estrategias son diferentes (tendríamos, por tanto, una estrategia de separación en la que cada posible tipo optaría por una acción diferente).

Así, para el tipo  $V_1$  (el que tiene costes de incumplir muy pequeños) la estrategia dominante sería “Incumplir siempre” (es decir, “Incumplir  $\forall b_1$ ”). Por el contrario, el tipo  $V_C$  (aquel que hemos definido con los costes de incumplir elevados) tendría como estrategia dominante la de “Cumplir siempre” (“Cumplir,  $\forall b_1$ ”). Por tanto, la estrategia del vendedor (que tiene que incluir una acción para cualquier contingencia en que se pudiera encontrar) la podríamos expresar de la siguiente manera:

$$(11.) \quad \text{Estrategia del vendedor,} \quad \begin{cases} \text{Si } V_1 \text{ entonces} & \text{“Incumplir, } \forall b_1 \text{”} \\ \text{Si } V_C \text{ entonces} & \text{“Cumplir, } \forall b_1 \text{”} \end{cases}$$

➤ **Paso segundo.- Precio esperado de los compradores en caso de ganar.** Los compradores en el momento de realizar sus pujas tendrán que analizar cual será el comportamiento esperado del vendedor. Desde el punto de vista del comprador  $i$ , lo que le interesa es realizar una conjetura sobre cual sería la probabilidad de que el vendedor “incumpla”, asumiendo que la puja que él presenta ( $b_i$ ) fuera la puja ganadora ( $b_1$ ).

Llamaremos  $\mu$ (*Incumplir*) o simplemente  $\mu$  a la probabilidad que el comprador  $i$  asigna a que el vendedor “incumpla”. (la probabilidad asignada a que cumpla será  $\mu$ (*Cumplir*) =  $1-\mu$ ). Como estamos considerando simetría, estas conjeturas son iguales para todos los compradores que se presenten a una misma venta.

Dada esta conjetura, los compradores pueden calcular la expresión para el precio esperado, en caso de ganar, como una función de su puja. Como la forma en que se calcula el precio va a depender de la acción que adopte el vendedor, el precio esperado también va a depender de la conjetura que hagan los compradores sobre este comportamiento. Así, tendríamos que el precio esperado del comprador  $i$  en caso de ganar, (al que llamaremos  $P_i^e(b_i, \mu)$ ), sería la media (ponderada por su probabilidad) del precio en el caso de que el vendedor cumpla, ( $P^C(b_i)$ ), y del precio en el caso de que el vendedor incumpla, ( $P^I(b_i)$ ),

$$P_i^e(b_i, \mu) = (1-\mu) P^C(b_i) + \mu P^I(b_i)$$

Sustituyendo las funciones de precio  $P^C(\cdot)$  y  $P^I(\cdot)$  por sus expresiones,

$$(12.) \quad P_i^e(b_i, \mu) = (1-\mu) b_i + \mu [3b_i/2 - V_{min}/2] = b_i (\mu+2)/2 - V_{min}\mu/2$$

De esta manera, observamos como el precio esperado (en caso de ganar) por parte de los compradores además de ser una función de su puja también lo va a ser de la conjetura ( $\mu$ ) que realice sobre el comportamiento del vendedor. Con esta función del precio esperado, la función de utilidad esperada del comprador  $i$  nos quedaría de la siguiente manera:

$$(13.) \quad \text{Utilidad esperada del comprador } i: \quad U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i, \mu)) \text{Prob}(b_i > b_1)$$

La única diferencia de (13.) con la expresión de la utilidad esperada del comprador  $i$  contenida en la ecuación (5.) utilizada en el Anexo 2 es la sustitución de la función de precio  $P^I(b_i)$  por  $P_i^e(b_i, \mu)$ .

➤ **Paso tercero.-Función de puja de los compradores.** Con la expresión de la utilidad esperada calculada en el paso anterior ya podríamos abordar el cálculo de la función de puja de los compradores. Como la utilidad esperada depende de la conjetura,  $\mu$ , esta también estará presente como veremos en su función de puja. Para calcular la función de puja, utilizaremos el mismo sistema empleado al final del Anexo 2 consistente en maximizar la utilidad esperada del comprador representada en este caso por la ecuación (13.). Al introducir los supuestos asumidos sobre la función de distribución de las valoraciones y al operar igual que en los mencionado Anexos el problema se podría expresar,

$$\text{Max}_{b_i} U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i, \mu)) [(B^{-1}(b_i, \mu) - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})]$$

De donde la condición de primer orden,

$$(14.) \quad -[(B^{-1}(b_i, \mu) - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})] (\partial P_i^e(b_i, \mu) / \partial b_i) + (v_i - P_i^e(b_i, \mu)) [(dB^{-1}(b_i, \mu) / db_i) / (V^{max} - V_{min})] = 0$$

De la ecuación (12.) deducimos que  $\partial P_i^e / \partial b_i = (\mu+2)/2$ . Sustituyendo en la ecuación anterior tanto esta expresión como la de  $P_i^e(\cdot)$  nos quedaría,

$$[(B^{-1}(b_i, \mu) - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})] / [(\mu+2)/2] = [(v_i - (b_i(\mu+2) - \mu V_{min})/2) / (dB^{-1}(b_i, \mu)/db_i) / (V^{max} - V_{min})]$$

De igual modo a lo realizado en los dos Anexos anteriores utilizamos la regla de la derivada de la función inversa e introducimos el requisito de Nash y simetría,

$$[(v_i - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})] / [(\mu+2)/2] = [(v_i - (B(v_i, \mu)(\mu+2) - \mu V_{min})/2) / (1 / B'(v_i, \mu) (V^{max} - V_{min}))]$$

Operando en esta ecuación, tras varios pasos llegamos a la siguiente expresión,

$$(15.) \quad B'(v_i, \mu) + B(v_i, \mu) / (v_i - V_{min}) = (\mu V_{min} + 2v_i) / [(v_i - V_{min})(\mu+2)]$$

que es una ecuación diferencial de primer orden del mismo tipo de las que ya hemos resuelto con anterioridad. En este caso el término a la derecha del signo igual (al que llamamos W) viene dado por  $W = (\mu V_{min} + 2v_i) / [(v_i - V_{min})(\mu+2)]$ . Así resolviendo la ecuación anterior obtenemos,

$$B(v_i, \mu) = e^{-\int \frac{1}{v_i - V_{min}} dv_i} \left( A + \int W e^{\int \frac{1}{v_i - V_{min}} dv_i} dv_i \right)$$

Donde A es una constante arbitraria. Operando,

$$B(v_i, \mu) = e^{-\ln(v_i - V_{min})} \left( A + \int W e^{\ln(v_i - V_{min})} dv_i \right)$$

$$B(v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min})) (A + \int W (v_i - V_{min}) dv_i)$$

Si sustituimos W por su valor,

$$B(v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min})) (A + \int (\mu V_{min} + 2v_i) / (\mu+2) dv_i)$$

$$(16.) \quad B(v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min})) [A + (v_i(\mu V_{min} + v_i)) / (\mu+2)]$$

Para obtener el resultado buscado tendríamos que determinar la constante A. Para ello, la despejamos,

$$A = [(V_{min} - v_i) (\mu+2) B(v_i, \mu) + v_i(\mu V_{min} + v_i)] / (\mu+2)$$

e introducimos la condición límite consistente en que cuando  $v_i = V_{min}$  entonces  $B(V_{min}, \mu) = V_{min} \forall \mu$ , obteniendo, que  $A = V_{min}^2 (\mu+1) / (\mu+2)$

Introduciendo este valor en (16.) y operando obtenemos la función de puja que estábamos buscando, y que llamaremos  $B^\mu(\cdot)$ .

$$B(v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min})) [(V_{min}^2 (\mu+1) / (\mu+2)) + (v_i(\mu V_{min} + v_i)) / (\mu+2)]$$

$$(17.) \quad \boxed{b_i = B^\mu(v_i, \mu) = [V_{min}(\mu+1) + v_i] / (\mu+2)}$$

Por tanto, las pujas de los compradores dependerán, además de su valoración, de la conjetura que realicen sobre cual será el comportamiento del vendedor

➤ **Paso cuarto.- Conjetura de los compradores.** Hemos visto que las conjeturas juegan un papel fundamental para los compradores pero todavía no hemos abordado la tarea de construir unas conjeturas que puedan formar parte de un Equilibrio Bayesiano Perfecto.

Para formarse sus conjeturas, los compradores utilizarán la información de la que disponen sobre el vendedor. Ya hemos dicho que no conocen el tipo del vendedor, aunque si la distribución de la que se ha derivado (que vendría resumida en el parámetro  $\varphi$  que representa la probabilidad con que la naturaliza elige al tipo  $V_i$ ). Además, para que las conjeturas puedan formar un EBP tienen que ser consistentes con la regla de Bayes y con las estrategias de los jugadores.

Desde el punto de vista de los compradores lo que les interesa es realizar una conjetura sobre cual sería la posibilidad de que el vendedor incumpla (a la que hemos llamado  $\mu$ ), asumiendo que la puja que él presenta,  $b_i$ , fuera la puja

ganadora  $b_1$ . Esto es debido a que, como hemos deducido en el paso tercero, la función de puja va a depender de  $\mu$ . Para calcular  $\mu$  los compradores tendrán que realizar conjeturas sobre cuales serían las probabilidades de incumplir de cada uno de los posibles tipos del vendedor ( $V_1$  y  $V_C$ ). Una vez que obtenidas estas conjeturas, podríamos obtener  $\mu$  como la media de las probabilidades de que cada tipo incumpla, ponderada por la conjetura que el vendedor hace sobre las probabilidades de que el vendedor pueda ser de cada uno de los posibles tipos. En este modelo con los supuestos realizados y con una única venta, los cálculos para obtener estos valores cumpliendo con los requisitos del EBP son sencillos. En primer lugar, para obtener las conjeturas sobre las probabilidades de que el vendedor sea de cada uno de los dos tipos posibles (a las que podemos llamar  $\theta(V_1)$  y  $\theta(V_C)$ ) sólo se contaría con las probabilidades “a priori”, (es decir,  $\varphi$  y  $1-\varphi$  respectivamente para los tipos  $V_1$  y  $V_C$ ). Esto es debido a que, al no haberse celebrado ninguna compra previa, los compradores no poseen ninguna información adicional sobre el vendedor<sup>54</sup>. Por tanto,

$$(18.) \quad \theta(V_1) = \varphi \quad \text{y} \quad \theta(V_C) = 1-\varphi.$$

Por otra parte,  $\mu(\text{Incumplir} | V_1)$  y  $\mu(\text{Incumplir} | V_C)$  se calcularían directamente a partir de la estrategia, en equilibrio, del vendedor. En este caso hemos visto que cada tipo de vendedor tiene una estrategia dominante y que además estas son diferentes. Así, en (11.) se recoge que el tipo  $V_1$  “Incumple siempre” y el  $V_C$  “Cumple siempre”. De esta manera, las únicas conjeturas consistentes con esta estrategia serían:

$$\mu(\text{Incumplir} | V_1)=1 \quad \text{y} \quad \mu(\text{Incumplir} | V_C)=0$$

Por tanto, en este caso la probabilidad de incumplir  $\mu$  coincide con la probabilidad de que el vendedor sea del tipo  $V_1$  y de esta manera,

$$(19.) \quad \mu \equiv \mu(\text{Incumplir}) = \varphi$$

Con estos cuatro pasos ya tendríamos especificado el EBP de este juego. De esta manera, *la estrategia del vendedor (11.), la estrategia de los compradores que viene dada por la función de puja (17.) junto con la conjeturas (18) y (19) constituyen un Equilibrio Bayesiano Perfecto.*

---

<sup>54</sup> Cuando el juego conste de varias ventas para cumplir con los requisitos del EBP los siguientes compradores tendrían que actualizar estas conjeturas, utilizando para ello la Regla de Bayes y las estrategias de los jugadores donde sea posible.