CNMV
Comisión
Nacional
del Mercado
de Valores

Estructuras de Titulización: Modelos de Valoración de CDOs

Ramiro Losada López

Estructuras de Titulización: Modelos de Valoración de CDOs

RAMIRO LOSADA LÓPEZ

Monografía n.º 18

Noviembre 2006

Ramiro Losada es técnico de la Dirección de Estudios y Estadísticas de la Comisión Nacional del Mercado de Valores.

La Comisión Nacional del Mercado de Valores, al publicar esta serie, pretende facilitar la difusión de estudios que contribuyen al mejor conocimiento de los mercados de valores y su regulación.

La Comisión Nacional del Mercado de Valores difunde la mayoría de sus publicaciones a través de la red INTERNET en la dirección **www.cnmv.es**

ISBN: 84-87870-60-0

Depósito Legal: M-3434-2007

Imprime: Cromotex

Resumen

En esta monografía se presentan y desarrollan diversos métodos para la valoración de estructuras de titulización CDO sintéticas. La valoración de estas estructuras son la base para la valoración de las estructuras de titulización CDO de flujo de caja.

El método estándar para la valoración de CDO sintéticas es el modelo de Vasicek o modelo de copula gaussiana. Sin embargo, este método no es adecuado a la hora de valorar todos los tramos de la estructura al no ser suficientemente flexible. Este modelo asume que la correlación necesaria para la correcta valoración de los tramos debe ser igual para todos ellos. Si se calibra el modelo usando los precios de mercado de un CDO y se obtiene la correlación entre los fallidos de la cartera, se observa que para la correcta valoración de los tramos es necesario que la correlación entre los distintos tramos sea diferente. Esto se conoce como la sonrisa de la correlación.

La industria financiera ha desarrollado métodos alternativos más flexibles con la intención de encontrar un método que valore correctamente las estructuras. Estos métodos son el modelo de copula gaussiana estocástica, el modelo de copula t de student, el modelo de copula doble t de student, el modelo de copula de Clayton y el modelo de copula de Marshall-Olkin. En esta monografía se muestra que la copula gaussiana estocástica es la que mejor se ajusta a los precios de mercado de los tramos de los CDO. Sin embargo, si consideramos solamente el CDO de referencia basado en el índice I-traxx, es la copula doble t de student la que mejores resultados de ajuste presenta.

A la espera de un método que ajuste sus valoraciones a los spreads observados en el mercado de cada uno de los tramos, una alternativa que se debería considerar es explotar la posibilidad de valorar cada uno de los tramos con el modelo que más se ajuste a las valoraciones de mercado.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

1. Introducción

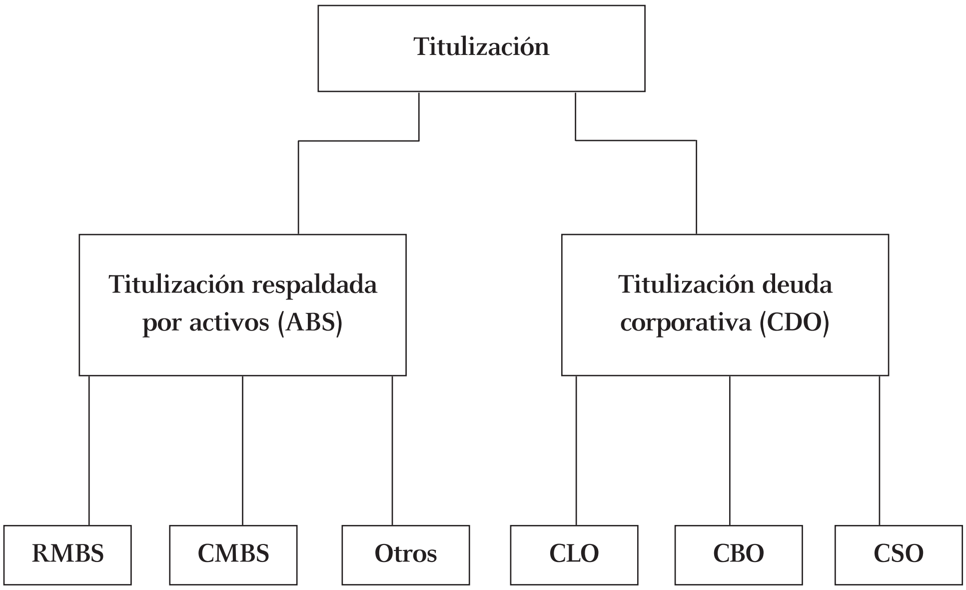
Las emisiones de titulización de activos consisten en la emisión de títulos, normalmente bonos de titulización, respaldados por una cartera de activos no negociables o poco líquidos que formaban parte originalmente del balance de una entidad financiera. En este tipo de estructuras, los bonos se emiten en diferentes tramos, constituyendo cada uno de los tramos una posición diferente en cuanto a rentabilidad y riesgo con respecto a los activos que los están respaldando. Las rentabilidades y riesgos de los diferente tramos se sitúan desde posiciones cercanas a la deuda pública hasta posiciones cercanas a la renta variable.

Las estructuras de titulización de activos son vehículos estructurados, estos vehículos se constituyen utilizando dos métodos alternativos. En el primero, que es el que se da en España y Francia, el vehículo se constituye sin personalidad jurídica y recibe el nombre de fondo de titulización. La mayoría de estos fondos están activamente gestionados por sociedades gestoras. Tanto el fondo de titulización como su sociedad gestora están sujetos a supervisión, inspección y en su caso sanción del organismo supervisor del mercado de valores del país donde está radicado el fondo de titulización, en el caso de España, la CNMV.

En el segundo método, el vehículo se constituye mediante lo que se conoce como un *special propose vehicle* (SPV). Las SPV si tienen personalidad jurídica, se constituyen como sociedades sin ánimo de lucro y con posibilidades remotas de quiebra. Las SPV tienen como único fin y propósito servir para que una empresa les transfiera activos y con ellos como respaldo emitir bonos. Las SPV están gestionadas por los *trustees*. Estos trustees son los poseedores de las acciones de las SPV y los administradores de las mismas. Básicamente los trustees tienen la misma función que la descrita para las sociedades gestoras de fondos de titulización en la alternativa anterior. En esta segunda alternativa serán las emisiones de bonos realizadas por las SPV las que serán objeto de registro y supervisión por parte del organismo supervisor del mercado de valores del país donde esté radicada la SPV.

Dentro de la titulización podemos destacar dos grandes familias. La primera recoge a las titulizaciones respaldadas por activos que poseen tanto las empresas financieras como las no financieras (ABS, Assets Backed Securities). Dentro de esta clase, cabe destacar por su importancia la subclase de las titulizaciones respaldadas por préstamos hipotecarios residenciales y sobre locales comerciales (en inglés, RMBS, *Residential Mortgage Backed Securities,* y CMBS, *Commercial Mortgage Backed Securities*). La otra gran familia la componen las titulizaciones respaldadas únicamente por deuda corporativa (CDO, *Collateralized Debt Obligations*). Dentro de esta familia existen diversas subclases: la titulización de bonos corporativos (CBO, *Collaterized Bond Obligations*), las titulizaciones respaldadas por préstamos corporativos (CLO, *Collaterized Loans Obligations*) y, por último, las titulizaciones respaldadas por derivados de crédito sobre deuda corporativa, conocidas también como titulizaciones sintéticas sobre deuda corporativa (CSO, *Collaterized Synthetic Obligations*). En esta última clase de titulización, en su versión no financiada, el fondo no emite bonos de titulización, en su lugar emite títulos en los que el comprador se compromete a dar protección al fondo de titulización en caso de que se produzcan fallidos en su cartera. A cambio de la protección, los compradores de los títulos reciben una prima periódica.

Tipo de titulización por componentes de su activo[1] FIGURA 1



Debido a la granuralidad en los activos de los fondos de las titulizaciones ABS, no existe un modelo matemático generalizado en que se apoyen los inversores que compran y venden estos bonos para su valoración. En este caso, se toma como referencia los precios que aparecen en los índices I-boxx que agrupa a las 50 emisiones de bonos de titulización ABS más grandes y líquidas que se dan en el mercado europeo. Dados estos precios, es labor del inversor ajustar y valorar si el precio y cupones de los bonos correspondientes se ajustan a las características específicas de la emisión de titulización que está valorando. Principalmente, se valora cómo puede variar la vida media de la emisión, así como la calidad de los componentes del activo del fondo en cuanto a su calidad crediticia y otros asuntos mas cualitativos como el gestor de la titulización o el país en se ha emitido, ya que se le da gran importancia a los controles supervisores que haya tenido que cumplir la emisión.

En el caso de los CDO, los modelos de valoración matemáticos adquieren una gran importancia ya que la escasa granularidad de su activo permite calcular matemáti-

1 En otros pueden aparecer facturas pendientes de cobrar, saldo deudores de tarjetas de crédito y cualquier derecho de crédito presente o futuro de cualquier empresa.

camente aproximaciones del valor de los diferentes tramos de una emisión. En este trabajo se describe el caso más sencillo y en el que se basan las valoraciones de todos los CDO, que es una titulización sintética no financiada.

La titulización consiste en dividir y vender por tramos el riesgo de crédito de una determinada cartera de activos. Un tramo comprendido en el intervalo $[K_L, K_U]$ asume las pérdidas por encima del porcentaje K_L hasta el porcentaje K_U del valor nocional inicial de la cartera subyacente que posee el fondo de titulización. Los inversores que posean títulos del tramo $[K_L, K_U]$ no sufrirán pérdidas siempre que se dé una pérdida en el cartera subyacente de activos por debajo del K_L por ciento de su valor nocional. Un ejemplo de la emisión de una estructura de titulización se encuentra en el cuadro 1:

Tramos de una estructura de titulización CUADRO 1

	Cotas (%)	
Tramos	**Inferiores K_L**	**Superiores K_U**
Equity	0	2
Junior 1	2	6
Junior 2	6	10
Supersenior	10	100

Fuente: Elaboración propia.

Como se desarrolla mas adelante las valoraciones de los títulos de los tramos de los CDO dependen de la distribución de las pérdidas esperadas de la cartera subyacente de activos, que a su vez dependen de las probabilidades de impago de cada uno de los activos que la componen, la correlación existente entre los impagos de los diferentes activos y, por último, de la tasa de recuperación de los distintos activos en caso de que causen impago.

Los compradores de los títulos y por tanto los vendedores de protección contra el riesgo de crédito de cada tramo tienen que ser compensados por la posibilidad de incurrir en las posibles pérdidas; reciben un premium expresado en puntos básicos sobre el nocional vivo que protegen hasta la maduración de la estructura de titulización. Normalmente el premium viene expresado en puntos básicos sobre el nocional de la cartera que forma el activo del fondo. El premium del tramo equity es el mas alto, ya que es el que soporta el mayor riesgo de crédito al absorber las primeras pérdidas que sufra el activo del fondo por impagos de sus deudores. Por el contrario, los tramos senior y supersenior tendrán un premium muy bajo ya que es muy difícil que ellos lleguen a soportar alguna de las pérdidas sufridas por incumplimientos por el activo del fondo.

En esta monografía se detalla el proceso de valoración de los diferentes tramos de una estructura de titulización sintética CDO. En la sección 2 se describe como calcular la probabilidad de fallido de cada de uno de los componentes de la cartera que componen el activo de la estructura. En la sección 3 se valora la cartera total de la estructura teniendo en cuenta su correlación usando el método estándar en el mercado, la copula gaussiana. Asimismo se discuten diversas extensiones sobre el modelo general propuesto. En la sección 4 se discute cómo calibrar el modelo anteriormente propuesto usando datos de mercado. En la sección 5 se propone la valoración de las estructuras mediante modelos alternativos y se realizan comparaciones con el modelo estándar. Finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones.

2. Modelos de valoración de un activo con riesgo de crédito

Para obtener las probabilidades de impago de los diferentes componentes que integran el activo del fondo existen dos tipos de modelos: los modelos estructurales y los modelos en forma reducida. Los modelos estructurales se basan en la evolución de las variables estructurales de los agentes que emiten los componentes que forman el activo del fondo de titulización, tales cómo el valor de sus activos y de su deuda, para determinar su probabilidad de impago. El modelo de Merton (1974) fue el primer modelo moderno de determinación de la probabilidad de incumplimientos y el primero en ser considerado un modelo estructural. En este modelo, un agente entra en situación de impago si, cuando la deuda tiene que ser pagada, el nivel de sus activos es menor que la deuda que tiene emitida. Una segunda aproximación, dentro del marco estructural, fue introducido por Black y Cox (1976). En esta aproximación, los impagos suceden cuando los activos de los agentes caen por debajo de un cierto umbral. En contraste con el modelo de Merton, el impago puede suceder en cualquier momento del tiempo.

En los modelos en forma reducida no se consideran relaciones entre el incumplimiento y la situación financiera de los agentes de una manera explicita. En contraste con los modelos estructurales, el momento de impago no se determina vía la situación financiera de los agentes, sino que se determina directamente a través de un ratio de riesgo de impago inferido a través de los precios de mercado de los activos que componen el fondo de titulización.

2.1. Modelo estructural

Los modelos estructurales proveen un nexo de unión entre la calidad crediticia de un agente y sus condiciones económicas y financieras. Los impagos son generados endogenamente por el modelo. Merton (1974) utiliza el modelo de valoración de opciones financieras de Black y Scholes (1973) para valorar la deuda de los agentes.

Se asume que la dinámica del valor de los activos de la empresa sigue un proceso de difusión en tiempo continuo, bajo la medida P de probabilidad real, dado por el siguiente proceso browniano geométrico:

$$\frac{dA_{n,t}}{A_{n,t}} = \mu_n dt + \sigma_n dW_{n,t}$$

donde μ_n es la rentabilidad esperada, σ_n es la volatilidad instantánea del activo y $W_{n,t}$ es un proceso browniano estándar bajo P. Si se asume que la estructura de capital del agente está compuesta por capital propio y por bonos sin cupón con maduración T y valor facial D_n, el valor del activo del agente es la suma del capital propio mas la deuda. Bajo estos supuestos, el capital propio representa una opción call sobre el activo de la empresa con maduración T y precio strike de D_n. Se asume que un agente esta en situación de impago si, cuando se alcanza la maduración, en T, el valor de los activos $A_{n,t}$ no es suficiente para poder pagar la deuda, D_n. Como consecuencia, la probabilidad de que en el instante t > T el agente se encuentre en situación de impago en T es:

$$p_{n,t,T} = \Pr\left[A_{n,T} < D_n \middle| A_{n,t}\right]$$

Este modelo asume que el impago solo puede suceder cuando se llega a la maduración de la deuda. Usando el lema de Ito, se puede determinar el valor de los activos del agente en T como:

$$A_{n,T} = A_{n,t} \exp\left\{\left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_n \sqrt{T-t} X_{n,t,T}\right\}$$

donde $X_{n,t}$ es:

$$X_{n,t,T} = \frac{W_{n,T} - W_{n,t}}{\sqrt{T-t}}$$

y sigue una distribución normal estándar con media cero y varianza uno.[2] En t se puede expresar la condición para que la empresa n entre en incumplimiento en T en términos de la variable aleatoria $X_{n,t,T}$:

$$A_{n,T} < D_n \Leftrightarrow X_{n,t,T} < K_{n,t,T}$$

donde:

$$K_{n,t,T} = \frac{1nD_n - 1nA_{n,t} - \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_n \sqrt{T-t}}$$

Así, podemos reescribir $p_{n,t,T}$ como:

$$p_{n,t,T} = \varphi\left(K_{n,t,T}\right)$$

donde $\varphi(.)$ es la función de distribución de la normal estándar. Para simplificar la notación, se fija $t = 0$, lo que permite eliminar parte de los subíndices.

2 Por definición de proceso Browniano, la diferencia $W_{n,T} - W_{n,t}$ sigue una distribución normal con media cero y desviación estándar igual a $\sqrt{T-t}$.

Una vez que ya se ha descrito como calcular la probabilidad de incumplimiento para un activo, se puede pasar a describir como calcular la probabilidad de incumplimiento de un conjunto de activos, en este caso, el conjunto de activos que configuran la cartera subyacente sobre la cual se van a emitir los bonos de titulización. A esa tarea se dedica la sección 3 de esta monografía.

2.2. Modelo reducido

En contraste con los modelos estructurales, la determinación del momento en que el activo de un agente entra en incumplimiento no viene determinado por el valor de los activos del agente sino por el primer salto de un proceso exógenamente dado. Los parámetros que gobiernan el ratio de riesgo de incumplimiento son inferidos a través de datos de mercado.

En este caso, se calculan las probabilidades de incumplimiento a partir del precio de mercado de los bonos emitidos por un agente o en su defecto a través de los Credit Default Swaps (CDS) que haya emitido.

En este modelo es clave la variable aleatoria llamada "tiempo de supervivencia". Esta variable aleatoria determina las valoraciones de los flujos de caja hasta que surja la situación de incumplimiento. Para determinar esta variable se necesita: un instante a partir del cual se empieza a contar el tiempo, una escala en la que medir el tiempo y una definición clara de lo que significa incumplimiento.

Normalmente se suele elegir el momento actual como instante a partir del cual contar el tiempo, con ello se puede usar información de mercado para construir las curvas de crédito. La escala de tiempo se define en años. Por último el significado de incumplimiento es el especificado por alguna de las agencias de calificación crediticia.

Formalmente, se considera un activo n, donde el tiempo de supervivencia de n, T, es una variable aleatoria continua que mide el periodo de tiempo desde el instante actual hasta que ocurre el incumplimiento. Sea F(t) la función de distribución de T:

$$F(t) = \Pr(T < t), t \geq 0$$

También se define:

$$S(t) = 1 - F(t)$$

Donde S(t) es la función de supervivencia del activo. Se supone también F(0) = 0 y S(0) = 1. La función de densidad de F(t) es:

$$f(t) = F'(t) = -S'(t)$$

Bajo estos supuestos la probabilidad instantánea de incumplimiento en un momento del tiempo *t* viene determinada por su ratio de riesgo:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

Así la función de supervivencia se puede expresar como:

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(s)ds\right\}, F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left\{\int_0^t h(s)ds\right\}$$

y

$$f(t) = S(t)h(t)$$

que es la función de densidad. En este modelo, el supuesto habitual es que el ratio de riesgo es constante para todo el periodo de tiempo considerado, lo cual implica que:

$$f(t) = h\ \exp\{-ht\}$$

lo que hace que T siga una función de distribución exponencial con parámetro h. Para saber la probabilidad de incumplimiento en cualquier momento del tiempo sólo tenemos que calibrar el parámetro h y sustituirlo en la función de densidad f(t). Esto se hace a partir de los precios de los bonos o los CDS que emite este agente y que están en la cartera de activos del fondo de titulización. Para ver como se lleva a cabo, se muestra un ejemplo sencillo.

Se supone que existe un bono con riesgo de crédito cuyo precio es V, cuya maduración es un año y que es idéntico a uno de los que aparecen en el activo de un fondo de titulización. Suponemos que el tipo de interés es constante a lo largo del tiempo, es decir, la estructura temporal de los tipos de interés es plana. En este caso, el precio del bono vendrá determinado por el precio del bono sin riesgo por la probabilidad de que el bono sobreviva durante el periodo considerado, en este caso un año, si normalizamos el precio actual del activo sin riesgo a 1:

$$V = \int_0^1 \exp\{-rt\}\ h\ \exp\{-ht\}dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = \frac{h}{r+h}\left(1-\exp\{-(r+h)\}\right)$$

De esta última expresión se puede obtener el valor h y con ello la probabilidad de impago de este activo.

3. Modelo de valoración de un solo factor de Vasicek

3.1. Determinación de la pérdida esperada de la cartera del fondo

Partiendo de que la probabilidad de incumplimiento de cada componente del activo en *t* viene determinado por un modelo estructural:[3]

$$p_{n,t} = \varphi\left(K_{n,t}\right)$$

$$K_{n,t} = \frac{1nD_n - 1nA_{n,0} - \left(\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)t}{\sigma_n \sqrt{t}}$$

y suponiendo que cada uno de los componente que constituyen el activo del fondo de titulización ha sido emitido por un agente, se quiere hallar la función de distribución del ratio de incumplimiento del activo del fondo, es decir, la fracción de componentes que incumplen en la cartera en t. Esta función de distribución será una variable clave para llegar a la variable que es la que de verdad interesa, que es el ratio de pérdida esperado en el activo del fondo. En esta sección se presenta la manera estándar en que el mercado modeliza y calcula la pérdida esperada de una cartera compuesta por activos con riesgo de crédito.

Para derivar el ratio de incumplimiento del activo del fondo, no es suficiente con saber las probabilidades de incumplimiento de cada uno de los componentes del fondo, $p_{1,t}$,.............$p_{N,t}$, también se debe conocer la correlación que existe entre los diferentes componentes del activo. Como la única variable aleatoria que afecta al estatus de cada activo n en t es $X_{n,t}$, la estructura de correlación entre las probabilidades de incumplimiento se deben introducir a través de la variables normales $X_{1,t}$,.............$X_{N,t}$. Así se supone que el coeficiente de correlación entre cada par de variables $X_{n,t}$ y $X_{m,t}$ es $\gamma_{n,m,t}$. Relativo a estos coeficientes de correlación se suele hacer el supuesto simplificador de que la correlación es igual para todo par de componentes del activo:

$$\gamma_{n,m,t} = \gamma_t \text{ para todo } n \neq m$$

Para justificar este supuesto, se puede pensar en que existe un factor aleatorio o una fuente de incertidumbre que afecta a todos los componentes del fondo exactamente de la misma manera. Así, se puede reescribir las variables aleatorias $X_{1,t}$,.............$X_{N,t}$ como:

$$X_{n,t} = \sqrt{\gamma_t}\, Y_t + \sqrt{1-\gamma_t}\, \varepsilon_{n,t}$$

3 Partimos del modelo estructural por ser el modelo que mejores fundamentos teóricos presenta.

para todo n=1,..............,N, donde $Y_t, \varepsilon_{1,t}, \ldots, \varepsilon_{N,t}$ son variables normales estándar distribuidas independientemente. Se puede interpretar cada variable aleatoria $X_{n,t}$, la cual determina si el activo va a incumplir en t, como la suma de dos factores de riesgo: un factor de riesgo sistémico representado por Y_t que afecta a todos los componentes y un factor idiosincrásico $\varepsilon_{n,t}$ que es exclusivo de cada componente.

Condicional a la realización del factor común Y_t la probabilidad de impago en t para cada componente viene dado por:

$$\begin{aligned} p_{n,t,T} &= \Pr\left[X_{n,t} < K_{n,t} \middle| Y_t\right] = \\ &= \Pr\left[\sqrt{\gamma_t}\, Y_t + \sqrt{1-\gamma_t}\, \varepsilon_{n,t} < K_{n,t} \middle| Y_t\right] = \\ &= \Pr\left[\varepsilon_{n,t} < \frac{K_{n,t} - \sqrt{\gamma_t}\, Y_t}{\sqrt{1-\gamma_t}} Y_t\right] = \\ &= \varphi\left(\frac{K_{n,t} - \sqrt{\gamma_t}\, Y_t}{\sqrt{1-\gamma_t}}\right) \end{aligned}$$

Las variables aleatorias $X_{1,t}, \ldots, X_{N,t}$ son independientes cuando se condicionan en la variable aleatoria Y_t, lo que hace que las probabilidades $p_{1,t}, \ldots, p_{N,t}$ también sean independientes. Como hemos visto antes $p_{n,t} = \varphi(K_{n,t})$, esto hace que se pueda expresar $K_{n,t}$ como $K_{n,t} = \varphi^{-1}(p_{n,t})$.[4] Substituyendo la última expresión, se obtiene que la probabilidad de impago del componente del activo del fondo condicionado en el factor sistémico Y_t es:

$$p_n(Y_t) = \varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(p_{n,t}) - \sqrt{\gamma_t}\, Y_t}{\sqrt{1-\gamma_t}}\right)$$

Al ser los riesgos idiosincrásicos y sistémico una variable aleatoria normal, el modelo de Vasicek es equivalente a una copula gaussiana.[5]

El siguiente supuesto simplificador que permite un modelo manejable es suponer que las probabilidades de incumplimiento de los componentes del activo del fondo es idéntico para todos ellos e igual a p_t:

$$p_{n,t} = p_t \text{ para todo } n = 1, \ldots, N$$

Este supuesto implica que todos los componentes del activo comparten la misma probabilidad condicional $p(Y_t)$:

$$p(Y_t) = \varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(p_t) - \sqrt{\gamma_t}\, Y_t}{\sqrt{1-\gamma_t}}\right)$$

---

4 En el caso de que se use un modelo reducido simplemente sustituiremos en este paso del modelo de valoración $p_{n,t}$ por el valor que hayamos obtenido de utilizar las variable de mercado.

5 Hay maneras alternativas de modelizar la probabilidad de incumplimiento de un conjunto de activos: usando más factores, otras funciones de distribución diferente de la normal, otras funciones de copula... más adelante se presentarán alternativas al modelo principal propuesto.

Se considera para cada componente n, la variable aleatoria $L_{n,t}$ que toma el valor 0 si el componente no ha incumplido antes de t y 1 en caso contrario. Se define la variable aleatoria L_t como la suma de las variables aleatorias $L_{1,t}$,..........,$L_{N,t}$ que representan el número de incumplimientos en el activo del fondo.

Si se divide el número de incumplimientos en el activo del fondo, definidos por L_t, por el número, N, total de componentes del activo del fondo, se obtiene la fracción de incumplimientos en el activo del fondo en el momento t, que se define como Ω_t. Esta última variable puede ser interpretada como la ratio de incumplimiento que ocurre en el activo del fondo en el momento t. La función de distribución incondicional de la ratio de incumplimiento del activo del fondo caracterizado por la probabilidad de incumplimiento de los componentes del activo p_t y por el coeficiente de correlación γ_t viene determinado por:

$$F(\omega; p_t, \gamma_t) = \Pr[\Omega_t \leq \omega]$$

Al ser los incumplimientos independientes, cuando se condicionan a la realización del factor común, Y_t, si se supone que el activo del fondo está compuesto por un número infinito de componentes de igual tamaño, se llega a la conclusión, utilizando la ley de los grandes números y suponiendo que el activo del fondo está compuesto por un número infinito de activos de igual tamaño, de que la fracción de componentes del activo incumplidos, Ω_t, converge a la probabilidad individual de incumplimiento de cada componente, $p(Y_t)$. Como consecuencia:

$$\begin{aligned}
& F(\omega; p_t, \gamma_t) = \Pr[\Omega_t \leq \omega] = \\
& = \Pr[p(Y_t) \leq \omega] = \\
& = \Pr\left[\varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(p_t) - \sqrt{\gamma_t}\, Y_t}{\sqrt{1-\gamma_t}}\right) \leq \omega\right] = \\
& = \Pr\left[Y_t \geq \frac{\varphi^{-1}(p_t) - \sqrt{1-\gamma_t}\,\varphi^{-1}(\omega)}{\sqrt{\gamma_t}}\right] = \\
& = 1 - \varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(p_t) - \sqrt{1-\gamma_t}\,\varphi^{-1}(\omega)}{\sqrt{\gamma_t}}\right) = \\
& = \varphi\left(\frac{\sqrt{1-\gamma_t}\,\varphi^{-1}(\omega) - \varphi^{-1}(p_t)}{\sqrt{\gamma_t}}\right)
\end{aligned}$$

Cuando $\gamma_t = 0$ los incumplimientos son estadísticamente independientes, por tanto $\Omega_t = p_t$ con probabilidad 1. En cambio, cuando $\gamma_t = 1$, $\Omega_t = 0$ con probabilidad $1-p_t$ y $\Omega_t = 1$ con probabilidad p_t.

La función de distribución $F(\omega;p_t;\gamma_t)$ es creciente en ω, con $F(0;p_t;\gamma_t) = \varphi(-\infty) = 0$ y $F(1;p_t;\gamma_t) = \varphi(-\infty) = 1$. Además se puede demostrar que:

$$E(\Omega_t) = p_t$$

y

$$\mathrm{Var}(\Omega_t) = \varphi_2\left(\varphi^{-1}(p_t), \varphi^{-1}(p_t); \gamma_t\right) - p_t^2$$

donde $\varphi_2(.,.;\gamma_t)$ es una función de distribución de una normal bivariante con media cero, con desviación estándar igual a uno y coeficiente de correlación γ_t.

Una vez sabemos cual es la probabilidad de incumplimiento del activo del fondo, si se supone que la tasa de pérdida en porcentaje del nocional, λ_t, es deterministica e igual para todos los componentes del activo, se puede calcular cual es la pérdida del activo del fondo en porcentaje de su nocional, $Z_t = \lambda_t \Omega_t$.

3.2. Valoración de la estructura de titulización

Cómo se describe en las subsecciones anteriores, el riesgo de crédito del activo del fondo de titulización se vende por tramos. Un tramo esta definido por unas cotas superior e inferior sobre el porcentaje del nocional del activo del fondo. Los compradores del tramo con unas cotas inferior, K_L y superior K_U soportarán todas las pérdidas producidas en el activo del fondo que superen el porcentaje K_L del valor nocional del mismo hasta un máximo de K_U.

El que las estructuras de titulización estén divididas en tramos permite que las pérdidas para los inversores de los tramos estén limitadas a un porcentaje máximo de K_U- K_L del valor inicial del activo del fondo.[6]

Si se denomina t al tiempo (en años) desde que la estructura se origino, T al tiempo de maduración (en años) de la estructura de titulización, M al valor nocional original del activo del fondo y Z_t al porcentaje perdido en la cartera subyacente con respecto a su valor nocional original en t, el valor total de la pérdida del activo del fondo en el momento t es Z_tM. La pérdida sufrida por los inversores del tramo j desde el origen de la estructura (en el momento cero) hasta el momento t es el porcentaje $Z_{j,t}$ del valor nocional original del activo, M:

$$Z_{j,t} = \min\left\{Z_t, K_{Uj}\right\} - \min\left\{Z_t, K_{Lj}\right\}$$

donde K_{Uj} y K_{Lj} son las cotas superior e inferior del tramo j.

Las pérdidas en que incurren los inversores de los tramos durante la vida de la estructura son calculados con una determinada frecuencia, que denominamos η y su escala viene determinada en años. Normalmente $\eta = 0{,}25$, es decir, un trimestre. Cada día en que se hacen los cálculos, los inversores conocerán las pérdidas que se

[6] Por ejemplo, si la cartera subyacente de la estructura de titulización de la tabla presentada en la introducción experimenta una pérdida del 9 por ciento de su valor inicial, los inversores del tramo equity soportarán las pérdidas del primer 2 por ciento de esas pérdidas. Los inversores del primer tramo junior soportarán las siguiente pérdidas hasta cubrir un 4 por ciento de las mismas. Por último, los inversores del segundo tramo junior soportarán el 3 por ciento restante de las pérdidas. Los inversores del tramo supersenior no tendrán que soportar ninguna pérdida.

han producido en el activo del fondo desde el último día de calculo. Si t fue la última vez en que se calculó el remanente que permanece en el activo del fondo, las pérdidas en que han incurrido los inversores del tramo j en el día t + η será una fracción $Z_{j,t+\eta}$-$Z_{j,t}$ del valor del nocional del activo del fondo.

Hasta aquí se ha descrito como los inversores deben afrontar las pérdidas que se producen en el activo del fondo durante el periodo de vida de la estructura de titulización. Sin embargo, los inversores deben ser compensados por tener que afrontar el riesgo de tales pérdidas. Los inversores del tramo j reciben un pago periódico, con frecuencia de η años, igual a s_j sobre el nocional vivo en el tramo j. En el momento t, el nocional vivo del tramo j, denominado por $\Gamma_{j,t}$, es su nocional inicial $(K_{Uj}$-$K_{Lj})M$ menos el total de pérdidas sufridas hasta el momento t, dado por $Z_{j,t}M$:

$$\Gamma_{j,t}=\left(K_{Uj}-K_{Lj}\right)M-Z_{j,t}M=\left(K_{Uj}-K_{Lj}-Z_{j,t}\right)M=$$
$$=\begin{cases}\left(K_{Uj}-K_{Lj}\right)M \text{ si } Z_t<K_{Lj}, \\ \left(K_{Uj}-Z_t\right)M \quad \text{si } K_{Lj}\leq Z_t\leq K_{uj} \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } Z_t>K_{uj}\end{cases}$$

Si t = 0 es el momento en que se origina la estructura de titulización, los días de pago son: $\eta, 2\eta, \ldots\ldots\ldots\ldots, T$, los flujos de caja para los inversores del tramo j son los siguientes en cada día de pago durante la vida de la estructura de titulización:

• Los inversores reciben

$$s_j\eta\Gamma_{j,t} \text{ en } t=\eta,\ldots\ldots\ldots\ldots,T$$

• Los inversores del tramo pierden

$$\left(Z_{j,t}-Z_{j,t-\eta}\right)M$$

para t = $\eta, 2\eta, \ldots\ldots\ldots\ldots, T$.

El premium s_j no varía durante la vida de la estructura de titulización. Sin embargo, el nocional del tramo j, $\Gamma_{j,t}$ es una función decreciente de las pérdidas producidas en el activo del fondo, Z_tM.

Como se ha visto en la descripción de las estructuras de titulización, cuanto mas subordinados son los tramos, mayor es la pérdida esperada que sufrirán sus inversores y por tanto mayor será el premium que recibirán por ello.

Una vez se tienen definidos los flujos de caja que reciben y pagan los inversores de los diferente tramos, se hace el supuesto de que los mercados son completos y que no hay oportunidades de arbitraje. La ausencia de arbitraje es una condición necesaria para la existencia de probabilidades neutrales al riesgo y el supuesto de mercados completos garantiza que esas medias neutrales al riesgo sean únicas. Valorar una estructura de titulización CDO sintética consiste en encontrar el premium, s_j para cada uno de los tramos j. El premium s_j se fija de tal manera que los flujos de caja netos de los inversores suman cero.

Al igual que un CDS, una estructura de titulización sintética no financiada consiste en dos partes, una fija y otra variable. La parte fija representa los pagos que los inversores de los tramos perciben, mientras que la parte variable son las pérdidas que se van materializando en el activo del fondo. Si se considera una estructura de titulización con días de pago, t_1,..........,t_K, fecha de maduración t_K y nocional M, donde $\eta = t_{k+1}-t_k$ para todo k = 0,.........,K, el valor de la parte fija en t_0 es igual a:

$$X_{F,j} = \sum_{k=1}^{K} \beta(t_0, t_k) s_j \eta E\left\lfloor \left(K_{Uj} - K_{Lj} - Z_{j,t_K}\right) M \right\rfloor$$

donde $\beta(t_0,t_k)$ es el factor de descuento entre t_0 y t_k. El valor de la parte variable es:

$$X_{V,j} = \sum_{k=1}^{K} \beta(t_0, t_k) E\left[\left(Z_{j,t_k} - Z_{j,t_{k-1}}\right) M\right]$$

El premium s_j se elige de tal manera que:

$$X_{F,j} = X_{V,j}$$

lo que implica que:

$$s_j = \frac{\sum_{k=1}^{K} \beta(t_0, t_k)\left(E\left[Z_{j,t_k}\right] - E\left[Z_{j,t_{k-1}}\right]\right)}{\sum_{k=1}^{K} \beta(t_0, t_k)\eta\left(K_{Uj} - K_{Lj} - E\left[Z_{j,t_k}\right]\right)}$$

Dadas las cotas inferior y superior de cada tramo, K_{uj} y K_{Lj}, los días de pago, t_1,.........,t_k y los factores de descuento, $\beta(.,.)$, se necesita evaluar cuales son las esperanzas matemáticas que aparecen en la expresión que permite valorar cual es el premium, s_j, de cada tramo. En particular se debe evaluar $E\left[Z_{j,t_k}\right]$, es decir, cual es la pérdida acumulada esperada por los inversores desde el origen de la estructura de titulización hasta el momento t_k, expresada como el porcentaje sobre el valor nocional del activo del fondo M.

$$E\left[Z_{j,t_k}\right] = E\left[\min\left\{Z_{tk}, K_{Uj}\right\} - \min\left\{Z_{tk} - K_{Lj}\right\}\right] \text{ para } k = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,K$$

Las características del activo del fondo (tamaño, probabilidad de incumplimiento para cada activo, correlación entre activos, pérdida esperada por incumplimiento...) determinaran la función de distribución de Z_{t_k} y como consecuencia los premium de los tramos.

Si en vez de tener una titulización sintética no financiada, se tiene una titulización donde el activo del fondo esta constituido por bonos además de por CDS, la valoración de los tramos se complica. En ese caso, en los tramos financiados se pagará un cupón que será euribor/libor + r_j, donde r_j se puede calcular suponiendo que el tramo es no financiado y ajustando la prima resultante no financiada s_j. Para hacer-lo se debe tener en cuenta como se amortizarán los bonos de los tramos financiados, si mediante pass-through o por amortización predeterminada. En el caso más sencillo en el que los bonos que componen el activo fueran sin riesgo de crédito, se hubieran comprado a la par y se optará por una amortización predeterminada que repaga el principal al final del periodo de maduración del tramo, r_j sería igual a s_j.

3.3. Hipótesis de cartera subyacente con un gran número de activos homogéneos

Si se supone que la cartera de activos subyacente cumple los mismos supuestos descritos en la subsección 3.1, entonces el porcentaje de pérdidas de la cartera en el momento del tiempo t, Z_t, viene dada por una pérdida esperada por incumplimiento, λ_t, igual para todos los activos, multiplicada por ratio de incumplimiento de la cartera, Ω_t.

El premium del tramo j, s_j, con cotas superior e inferior K_{Uj} y K_{Lj} se determina usando el procedimiento descrito en la sección anterior. Ello unido a las ecuaciones descritas anteriormente:

$$F(\omega;p_t,\gamma_t)=\varphi\left(\frac{\sqrt{1-\gamma_t}\,\varphi^{-1}(\omega)-\varphi^{-1}(p_t)}{\sqrt{\gamma_t}}\right)$$

y

$$Z_{j,t}=\min\{Z_t,K_{Uj}\}-\min\{Z_t,K_{Lj}\}$$

hace que podamos expresar $E\left[Z_{j,t_k}\right]$ como:

$$E\left[Z_{j,t_k}\right]=\int_0^1\left(\min\{\lambda_{t_k}\omega,K_{Uj}\}-\min\{\lambda_{t_k}\omega,K_{Lj}\}\right)\,dF(\omega;p_{t_k},\gamma_t),k=1,........,K$$

Esta integral necesita ser evaluada por métodos numéricos.

Es importante señalar que es una práctica común a la hora de la valoración de los tramos suponer que los parámetros de correlación son constantes no sólo entre los diferentes activos, sino que también a lo largo del tiempo:

$$\gamma_{t_k}=\gamma$$

Además γ normalmente se estima (donde en este caso normalmente no significa que sea adecuadamente) a partir de las correlaciones de los activos de renta variable que emitieron los mismos agentes que emitieron los activos que forman parte de la cartera subyacente.

Claramente, los premium de los tramos son una función positiva de la probabilidades de incumplimiento y de las pérdidas en caso de incumplimiento. Sin embargo, el impacto de la correlación en los incumplimientos sobre los premiums de los tramos es mucho mas complicada de analizar. En el tramo equity, una correlación entre incumplimiento mas alta incrementa la probabilidad de que no ocurran incumplimientos y esto hace que el premium sea menor. Lo contrario sucede con los tramos mas senior, donde un nivel más alto de correlación entre incumplimientos incrementa la probabilidad de que ocurran un alto número de incumplimientos, incrementando las pérdidas esperadas en el tramo y por tanto su premium. Mientras que los premium de los tramos equity y senior son monótonas con respecto a la correlación entre incumplimientos, su impacto en los tramos junior no se pueden predecir a priori. Depende de las características de la cartera subyacente y del orden de prelación que tenga el tramo en la estructura de titulización.

3.4. La sonrisa de la correlación

Es bien conocido lo que significa y como se calcula la volatilidad implícita en la valoración de las opción europeas sobre acciones. El mismo ejercicio se puede realizar con los precios de mercado de los tramos de las estructuras de titulización. En este caso el modelo de Vasicek presentado anteriormente jugará el mismo papel que la formula de Black-Scholes y el coeficiente de correlación entre incumplimientos γ (suponiendo que es constante entre los diferentes activos y a lo largo del tiempo), que la volatilidad del precio de la acción.

Por tanto, dado el precio de mercado de un tramo de una titulización, usando la formula de la valoración de los premium obtenida en la subsección 3.2 y fijando el valor del resto de parámetros, se puede hallar numéricamente el coeficiente de correlación γ que lleva aparejado el premium de mercado del tramo.

Usando los premium de mercado de cada uno de los tramos de una misma titulización, se puede calcular la correlación entre incumplimientos implícita para cada tramo. Si el modelo de Vasicek fuera correcto deberíamos obtener la misma correlación para todos los tramos. Sin embargo, esto no ocurre. En general, la correlación implícita es mas alta en el tramo equity y en los tramos senior que en los tramos junior, lo que se conoce como la sonrisa de la correlación.

En Amato y Gyntelberg (2005), se presentan varias explicaciones posibles para la presencia de la sonrisa de la correlación:

– Hay segmentación entre los inversores de los diferentes tramos y estos inversores difieren en su visión sobre la correlación.

– La sonrisa refleja la incertidumbre de los inversores sobre la mejor manera de modelizar las correlaciones sobre riesgo de crédito, los inversores del tramo equity, que son mas sensibles a la correlación, tienen un extra anidado en su premium por su mejor modelización de la correlación.

– Los participantes en el mercado utilizan otro modelo diferente del de Vasicek.

3.5. Extensiones al modelo de Vasicek

El atractivo del modelo de Vasicek para valorar estructuras de titulización CDO sintéticas reside en su simplicidad y en su fácil aplicación, que sólo requiere del cálculo de un conjunto de integrales numéricas. Sin embargo, los supuestos sobre la cartera que forma el activo del fondo son muy fuertes.

Hay un gran número de modelos, que tomando como base el modelo de Vasicek, relaja uno o varios supuestos y produce una forma diferente de fijar los premium de los tramos de las titulizaciones. En algunos, sino en todos los casos, estas nuevas formas de valoración necesitan simulaciones de Monte Carlo. En las siguientes subsecciones se presentan estos modelos.

3.5.1. Cartera con un número finito de activos homogéneos

Las carteras subyacentes de las estructuras varían en tamaño. Si se relaja el supuesto de que el número de activos que forman la cartera es muy grande, $N \to \infty$, no se puede obtener la ecuación para la función de distribución de las pérdidas de la cartera que se obtuvieron anteriormente:

$$F(\omega; p_t, \gamma_t) = \varphi\left(\frac{\sqrt{1-\gamma_t}\,\varphi^{-1}(\omega) - \varphi^{-1}(p_t)}{\sqrt{\gamma_t}}\right)$$

En este caso, el número de incumplimientos en la cartera subyacente en el momento t, L_t, es una variable aleatoria binomial (N, p (Y_t)) condicionada en el factor de riesgo sistémico, Y_t. Como consecuencia, la probabilidad condicionada de que la cartera experimente x incumplimientos antes del momento t viene determinada por:

$$\Pr(L_t = x | Y_t) = \binom{N}{x} p(Y_t)^x \left(1 - p(Y_t)\right)^{N-x}$$

Como el factor común Y_t sigue una variable normal estándar independiente, la probabilidad incondicional de que una cartera experimente x incumplimientos antes del momento t es:

$$\Pr(L_t = X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(L_t = x | s)\, d\varphi(s)$$

Donde φ (.) es la función de distribución de la normal estándar.

Si el tamaño de los activos que componen la cartera son de tamaño similar, cada vez que haya un incumplimiento, este afectara a un porcentaje de 1/N del nocional de la cartera. Por tanto, la función de distribución de las pérdidas de la cartera en porcentaje en el momento t es:

$$\hat{F}(\omega; p_t; \gamma_t) = \sum_{x=0}^{N} \Pr(L_t = x)\ 1_{\left\{\omega \geq \frac{x}{N}\right\}},$$

donde $1_{\left\{\omega \geq \frac{x}{N}\right\}}$ es la función indicador.

La expresión para calcular los premium de los tramos, s_j, viene determinada por la expresión que aparece en la subsección 3.2, sin embargo, $E\left[Z_{t_k}\right]$ viene dado por la expresión:

$$E\left[Z_{t_k}\right] = \int_0^1 \left(\min\left\{\lambda_{t_k} x, K_{Uj}\right\} - \min\left\{\lambda_{t_k} x, K_{Lj}\right\}\right)\ k = 1, \ldots\ldots, K$$

3.5.2. Cartera subyacente con un número finito de activos heterogéneos

El supuesto de una cartera subyacente con un número finito de activos heterogéneos representa la aproximación mas ajustada al mundo real. En una cartera heterogénea, cada activo tiene una probabilidad de incumplimiento $p_{n,t}$, una tasa de recuperación $\lambda_{n,t}$ y una exposición al factor de riesgo sistémico $\gamma_{n,t}$. Cada activo n representa una fracción f_n del valor inicial de la cartera.

Hay varias técnicas para derivar la distribución del ratio de pérdida de la cartera z_t. En este trabajo se presenta la técnica mas intuitiva, basada en Transformación Rápida de Fourier, aunque se ha demostrado que no es la más eficiente en términos computacionales entre las alternativas disponibles (para ver ejemplos de otras alternativas véase Basu y Sidenius (2003), Gregory y Laurent (2003), De Prisco, Iscoe y Kreinin (2005) y Hull y White (2004)).

Como se vio anteriormente, la probabilidad de incumplimiento del activo condicionado a la realización de un factor común es:

$$p_n(Y_t) = \varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(p_{n,t}) - \sqrt{\gamma_{n,t}}\,Y_t}{\sqrt{1-\gamma_{n,t}}}\right).$$

El porcentaje de pérdida de la cartera en el momento t, Z_t viene dado por:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{N} L_{n,t} f_n \lambda_{n,t},$$

donde, para cada activo n, la variable aleatoria $L_{n,t}$ toma el valor 1 si el activo ha incumplido desde el inicio de la estructura hasta el momento t y 0 en caso contrario.

La función característica de la variable aleatoria Z_t condicionada al factor de riesgo común a todos los activos es:

$$\begin{aligned}
\Psi(u|Y_t) &= E\left[\exp\{iuZ_t|Y_t\}\right] = \\
&= E\left[\exp\left\{iu\sum_{n=1}^{N} L_{n,t} f_n \lambda_{n,t}|Y_t\right\}\right] = \\
&= E\left[\prod_{n=1}^{N}\exp\{iuL_{n,t} f_n \lambda_{n,t}|Y_t\}\right],
\end{aligned}$$

donde $i=\sqrt{-1}$.

Condicionadas al factor común Y_t, las variable aleatoria $L_{1,t}$,........, $L_{N,t}$, son variables Bernoulli independientes:

$$\begin{aligned}
\Psi(u|Y_t) &= E\left[\prod_{n=1}^{N}\exp\{iuL_{n,t} f_n \lambda_{n,t}|Y_t\}\right] = \\
&= \prod_{n=1}^{N}\left[p_n(Y_t)\exp\{iuf_n\lambda_{n,t}\} + (1-p_n(Y_t))\right] = \\
&= \prod_{n=1}^{N}\left[1 + p_n(Y_n)(\exp\{iuf_n\lambda_{n,t}\}-1)\right].
\end{aligned}$$

Integrando sobre el dominio de Y_t, se obtiene la función característica incondicional de la pérdida porcentual de la cartera:

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u|Y_t) d\omega(Y_t).$$

Una vez tenemos calculada numéricamente la función característica incondicional del porcentaje Z_t, se usa la Transformación Rápida de Fourier para recuperar su función de distribución que es la que se emplea para las fórmulas de valoración de los premium de los tramos de las estructuras.

3.5.3. Correlaciones de incumplimiento estocásticas

La práctica mas habitual a la hora de valorar estructuras de titulización es considerar que las correlaciones de incumplimiento son constantes a lo largo de la vida de la titulización y a su vez, suponer que son iguales entre los distintos activos que conforman la cartera del activo del fondo e independientes de las probabilidades de incumplimiento de los activos. Con respecto al último supuesto, hay una creciente literatura empírica que sugiere que las correlaciones de incumplimiento son positivamente dependientes de las probabilidades de incumplimiento.[7] Para responder a esta evidencia empírica en Hull, Pedrescu y White (2005) se presenta un modelo donde las correlaciones de los incumplimientos se hacen estocásticas y están correlacionadas con el factor sistémico, generando un mejor ajuste con los premium de mercado de los diferentes tramos de las estructuras de titulización. El modelo propuesto necesita para su implementación del uso del método de Monte Carlo y se puede extender incluyendo mas de un factor.

En Burtschell, Gregory y Laurent (2005) se considera el caso general de este modelo, donde las variables aleatorias $X_{1t}, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{Nt}$ toman la forma de:

$$X_{n,t} = \sqrt{\gamma_n} Y_t + \sqrt{1-\gamma_n} \varepsilon_{n,t} \text{ , para todo, } n = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, N,$$

donde $\gamma_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \gamma_N$ son correlaciones estocásticas independientes que siguen una distribución de Bernoulli, formando con las variables $Y_t, \varepsilon_{1t}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_{Nt}$ mixturas de normales. Con esta configuración las variables $X_{1t}, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{Nt}$ siguen distribuyéndose como normales estandar. Al contrario que en Hull, Pedresdu y White (2005), las correlaciones de incumplimientos son independientes del factor de riesgo sistémico. Los autores muestran que con la correlación estocástica prácticamente eliminan el problema de la sonrisa de la correlación para entre otros, los modelos donde se considera que los factores de riesgo sistémico e idiosincrásicos siguen distribuciones normales o t de student.

7 Entre los artículos que se refieren a este tema cabe citar a De Servigny y Renault (2002), Ang y Chen (2002) y Das, Freed y Kapadia (2004).

4. Calibración

Elegir un modelo de entre los presentados anteriormente para valorar los tramos de la estructura de titulización es ya una tarea complicada. Sin embargo es solamente la mitad del problema. Una vez el modelo esta especificado se deben dar valores a los parámetros para obtener los premium de los diferentes tramos.

Hay tres grupos principales de variables que tienen que ser estimados: las probabilidades marginales de incumplimiento para cada activo, las correlaciones entre incumplimientos y la tasa de recuperación en caso de incumplimiento.

Cómo ya se describió anteriormente las probabilidades marginales de incumplimiento se pueden obtener usando varios métodos:

– Usando un modelo estructural y datos de los agentes sobre sus activos y pasivos.

– Usando modelos en forma reducida y precios sobre instrumentos con riesgo de crédito emitidos por los agentes.

– Usando la información de las agencias de crédito que proveen al mercado con estimaciones sobre las probabilidades de incumplimiento de ciertos agentes, sobre todo empresas.

Con respecto a las tasas de recuperación, lo más habitual, cuando existen, es usar las estimaciones ofrecidas por las agencias de calificación sobre los agentes que respaldan los componentes del activo del fondo. Estas tasas de recuperación se suelen suponer constantes independientemente del nivel de subordinación de los títulos emitidos por el agente y del tiempo.

Sin duda la calibración de la correlación entre incumplimientos es la parte más complicada del proceso. La forma en que la correlación entre fallidos se introduce en los modelos descritos arriba es conveniente en términos de modelización, sin embargo, es bastante contraproducente en términos de calibración. La exposición al factor de riesgo sistémico γ, representa el impacto del factor de riesgo sistémico (inobservable) en una variable aleatoria $X_{n,t}$ que es una transformación no lineal del valor de los activos del agente. El mayor problema cuando se calibra no es la disponibilidad de datos, sino la dificultad de interpretar lo que γ representa.

Lo más habitual, cuando se puede, es usar como aproximación la correlación entre los valores de renta variable emitidos por los agentes. Sin embargo, no se ha comprobado que esta sea una buena estimación, de hecho no se conoce cual es la relación que puede existir entre precios de los valores de renta variable y la exposición del emisor al riesgo sistémico.

El problema de calibrar la exposición al riesgo sistémico es un problema de condiciones de segundo orden. Primero se debe entender lo que realmente quiere decir ese parámetro, o lo que es lo mismo cuales son las verdaderas variables económicas que le afectan, quedando pendiente un extenso trabajo empírico que debe determinar esas variables.

5. Modelos alternativos de copula

En el modelo de Vasicek, una empresa n incumplía en el momento t si la variable $X_{n,t}$ era menor que el nivel de incumplimiento, K_n. Además, $X_{n,t}$ es una función de un factor sistémico y común para todos los activos, Y_t, y de un factor idiosincrático para cada activo, $\varepsilon_{n,t}$, asumiéndose que todos estos factores son variable aleatorias normales independientes. Como consecuencia, la estructura de dependencia del riesgo de crédito entre la cartera de activos viene dada por una distribución normal multivariante o copula normal.

Sin embargo, no hay razones que respalden la decisión de elegir la distribución normal como la distribución de las variable aleatorias $Y_t, \varepsilon_{1,t}, \ldots, \varepsilon_{N,t}$ y como consecuencia para las variables aleatorias $X_{1,t}, \ldots, X_{N,t}$. Frey, Mcneil y Nyfeler (2001) muestran que la distribución para la cartera es extremadamente sensible a la naturaleza de la distribución de las variables latentes $X_{1,t}, \ldots, X_{N,t}$. Una de las principales razones por las que usar distribuciones distintas de las que generan la copula gaussiana es que, como se ha expuesto anteriormente, esta no puede generar valoraciones para los diferentes tramos de la estructura de titulización coherentes con las valoraciones de mercado con un solo coeficiente de correlación, generando la sonrisa de la correlación.

Las copulas alternativas más comunes que se suelen utilizar para valorar productos financieros con riesgo de crédito son: la copula t de student, la copula doble t de Student, la copula de Clayton y la copula de Marshall-Olkin. En los siguientes modelos que se describen, se desarrolla el modelo de valoración hasta lograr la función de probabilidad condicional de cada activo, las cuales en todos los casos son independientes de las probabilidades condicionales de los otros activos de la cartera.

Todos los modelos que se describen a continuación tienen los mismos supuestos que los descritos para el modelo de copula gaussiana. Cuando se realice las comparaciones entre los resultados de los nuevos modelos y los de la copula gaussiana se realizará bajo la hipótesis de que la cartera esta compuesta por infinitos activos. Sin embargo, bajo un alto coste computacional, los modelos de copula que se van a proponer también permiten su extensión a carteras compuestos por un número finito de activos homogéneos y carteras compuestas por un número finito de activos heterogéneos.

5.1. Copula t de Student

La copula t de Student ha sido considerada por algunos autores como un modelo de valoración superior en temas de riesgo de crédito de una cartera de activos. Este modelo de copula se presenta en diferentes trabajos, entre ellos: Andersen y otros (2003), Demarta y McNeil (2004), Embrechts y otros (2003), Marshal y Zeevi (2003) o O'Kane y Shloegl (2003).

En la copula de la t de Student, las variables latentes, Z_{1t}, X_{2t},............X_{Nt}, siguen una distribución t de Student con ν grados de libertad. Suponiendo que todas las X_{nt} siguen la misma distribución, $X_{nt}=\sqrt{W}V_{nt}$, $V_{nt}=\sqrt{\gamma}Y_t+\sqrt{1-\gamma}\varepsilon_{nt}$, donde Y_t, ε_{1t},.......,ε_{Nt} son variables aleatorias normales, y W es una variable aleatoria independiente de V_{1t},.........,$V_{N,t}$ que sigue una distribución Gamma inversa con parámetros $\frac{\nu}{2}$ (o equivalentemente $\frac{\nu}{W}$ sigue una distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad). En este caso la correlación entre las variables X_{it} y X_{jt} es igual $\frac{\nu}{\nu-2}\gamma^2$.

para $\nu>2$. Si se denomina t_ν a la función de distribución de la t de Student univariante, es decir a la función de distribución de las variables X_{nt}, entonces se obtiene que condicional a Y_t y W la probabilidad de incumplimiento de los n componentes de la cartera son independientes e iguales a:

$$p_n(Y_t,W)=\varphi\left(\frac{W^{-1/2}\,t_\nu^{-1}(p_t)-\sqrt{\gamma}Y_t}{\sqrt{1-\gamma}}\right).$$

Lo que hace que el modelo de la copula t de Student sea un modelo de dos factores.

5.2. Copula doble t de Student

Este modelo de copula para la valoración de carteras con riesgo de crédito fue presentado recientemente en el artículo de Hull y White (2004). En este modelo las variables latentes X_{1t},............,X_{Nt} toman la siguiente forma:

$$X_{nt}=\sqrt{\gamma}\left(\frac{\nu-2}{\nu}\right)^{1/2}Y_t+\sqrt{1-\gamma}\left(\frac{\bar{\nu}-2}{\bar{\nu}}\right)^{1/2}\varepsilon_{nt}\,,\ n=1,.......,N$$

donde Y_t y ε_{nt} son independientes y siguen una distribución t de Student con ν y $\bar{\nu}$ grados de libertad respectivamente, $\gamma\geq 0$. Es importante señalar que al no ser la t de Student estable bajo convolución, las variables X_{nt} no siguen una distribución t de Student a pesar de ser una suma de dos variables t de Student. En este caso, al igual que ocurre con el caso del modelo de copula gaussiana, $\rho = 0$ se asocia con fallidos independientes entre los diferentes componentes y $\rho = 1$ con fallidos de los componentes de la cartera totalmente correlados. En este caso la probabilidad de fallido del componente n de la cartera condicionado al factor común Y_t es:

$$p_n(Y_t)=t_{\bar{\nu}}\left(\left(\frac{\bar{\nu}}{\bar{\nu}-2}\right)^{1/2}\frac{H^{-1}(p_n)-\rho\left(\frac{\nu-2}{\nu}\right)^{1/2}Y_t}{\sqrt{1-\gamma}}\right),$$

donde H(.) es la función de distribución de las variables X_{nt}.

5.3. Copula de Clayton

Diversos trabajos, entre ellos: Gregory y Laurent (2003), Madan, Konikov y Marinescu (2004) y O'Kane y Shloegl (2003) han considerado este tipo de copula en el contexto de la valoración de carteras con riesgo de crédito.

En este modelo de copula, se considera una variable aleatoria que en la notación usada hasta ahora se identifica con la variable y_t que sigue una distribución Gamma estándar con un parámetro $1/\theta$, $\theta>0$.[8] Su función de densidad en este caso es:

$$f(y_t)=\frac{1}{\Gamma(1/\theta)}e^{-y_t}y_t^{(1-\theta)/\theta}\ ,\ y_t>0.$$

Se denomina Ψ a la transformación de Laplace de la función de densidad $f(y_t)$. En este caso la transformación de Laplace toma la forma funcional:

$$\Psi(u)=\int_0^\infty f(y_t)e^{-uy_t}dy_t=(1+u)^{-1/6}.$$

En este tipo de copula, definimos las variables representantes de cada uno de los componentes de la cartera, $X_{1t},\ldots\ldots\ldots,X_{Nt}$, como:

$$X_{nt}=\Psi\left(-\frac{LnV_{nt}}{Y_t}\right),$$

donde $V_{1t},\ldots\ldots.V_{Nt}$ son variables aleatorias uniformes independientes entre si e independientes también de Y_t. En este caso la probabilidad de fallido de los componentes de la cartera subyacente condicional al factor común Y_t es:

$$p_t(Y_t)=\exp\left\{Y_t\left(1-p_n^{-\theta}\right)\right\}.$$

5.4. Copula de Marshall-Olkin

Este tipo de copula es conocida también como modelo de shock o cómo modelo multivariante exponencial. Este modelo fue introducido en la valoración de carteras con riesgo de crédito por Duffie y Singleton (1998) y ha sido considerado posteriormente por diversos autores: Li (2000), Wong (2000) o mas recientemente Elouerkhaoui (2003), Giesecke (2003) y Lindskog y McNeil (2003).

En este modelo las variables que representan a cada uno de los componentes de la cartera subyacente toman la siguiente forma funcional, $X_{n,t}$ = min (Y_t,ε_{nt}), n = 1,..........,.N, donde Y_t y ε_{nt}, n = 1,..........N son variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con parámetros α y $1-\alpha$, $\alpha\in(0,1)$.

Con este tipo de copula, por conveniencia, se utiliza para los cálculos la probabilidad de supervivencia del activo, en vez de su probabilidad de incumplimiento.[9] Se denomina a la probabilidad incondicional de supervivencia de un activo s_n y en este caso toma la siguiente forma funcional:

[8] Este tipo de copula pertenece al tipo de las Archimedean siendo el generador de la copula $\kappa(d)=d^{-\theta}-1$.

[9] Es conveniente recordar que la probabilidad de supervivencia de un activo no es más que el complementario de la probabilidad de incumplimiento de un activo.

$$s_n = \exp\{-\min\{Y_t, \varepsilon_{nt}\}\},$$

La probabilidad de supervivencia condicionada a Y_t del activo n, dadas las características de la copula de Marshall-Olkin es:

$$s_n(Y_t) = 1_{Y_t > -Lns_n} s_n^{1-\alpha} .$$

5.5. Comparación con el modelo de Vasicek

Esta comparativa se basa en los resultados expuestos en el trabajo de Burtschell, Gregory y Laurent (2005) y en un ejemplo de un CDO compuesto por 30 CDS sobre deuda senior de empresas españolas de gran capitalización y empresas europeas cuyos CDS cotizan en el índice I-traxx. En ambos casos los modelos están calibrados usando los spreads de mercado de los CDS. Las diferentes copulas se han calibrado de tal manera que todas ellas dan como resultado los mismos spreads para los casos del tramo equity.

Como se señaló en la subsección anterior existe un CDO sintético basado en los CDS que componen el índice I-traxx que continuamente cotiza. Al tener permanentemente esta referencia de mercado diversos autores han tratado de encontrar el modelo de copula que mejor se ajusta a este CDO. Entre los trabajos que se centran en estudiar cual es la copula que mejor se ajusta al comportamiento del CDO basado en el I-traxx destaca el trabajo de Brutschell, Gregory y Laurent (2005).

El CDO sintético éstandar basado en Itraxx tiene cinco tramos. El tramo equity comprende el primer 3% de pérdida producida en la cartera subyacente. El primer tramo junior comprende el siguiente 3%. El segundo tramo junior comprende el siguiente 3% de pérdida. El tramo senior responde por las pérdidas comprendidas entre el 12% y el 22% del total de la cartera subyacente. Por último, el tramo supersenior responde por las pérdidas no cubiertas por el resto de tramos, su nominal es el 78% del nominal total de la cartera subyacente. Este CDO esta compuesto con 125 CDS y en el momento de la realización del artículo de Brutschell, Gregory y Laurent (2005), los spread de los CDS se situaban entre los 9 y los 120 puntos básicos, con una media de 29 puntos básicos y una mediana de 26 puntos básicos. En este trabajo se estima los spreads de los cinco tramos del CDO mediante la copulas normal, t-student, doble t-student, estocástica, Clayton y Marshall-Olkin y se comparán con los existentes en el mercado, el resultado se encuentra en el cuadro 2:

Valoración Spreads (pb) CUADRO 2

	Mercado	Normal	t-Student	Doble t-Student	Estocástica	Clayton	M-O
Tramo equity	916	916	916	916	916	916	916
Tramo junior 1	101	163	164	82	122	163	14
Tramo junior 2	33	48	47	34	53	47	11
Tramo senior	16	17	15	22	29	16	11
Tramo supersenior	9	3	2	13	8	2	11

Fuente: Brutschell X., Gregory J. y Laurent J.P. (2005).

Si se observa el cuadro 2, se comprueba que la copula que mejor se ajusta es la doble t-student. Si bien y por tramos hay copulas que se ajustan mejor, así para el tramo senior la copula clayton es la que mejor ajusta y tanto la copula t-student como la normal dan una estimación del spread para ese tramo muy próximo al de mercado. En el caso del tramo supersenior, la que mejor se ajusta es la copula estocástica.

El mejor comportamiento global de la copula doble t-student y el buen comportamiento de la copula estocástica es debido a que son copulas que generan por si solas la sonrisa de la volatilidad descrita anteriormente. Son copulas que aparte de valorar razonablemente tanto los tramos equity como supersenior son capaces de no sobreestimar el spread que adjudican a los tramos junior. El único punto débil de ambas copulas es que sobreestiman el tramo senior.

Dados los resultados del cuadro 2 parece razonable pensar que lo mejor para valorar los diferentes tramos del CDO es usar diferentes copulas. Es claro que para el tramo junior 2 lo mejor es usar la copula doble t y para el tramo supersenior lo mejor es usar la copula estocástica. En el caso del tramo junior 1 lo razonable es usar la copula doble t o la copula estocástica, no siendo descartable usar una combinación de los spreads obtenidos por ambas. En el caso del tramo senior varias copulas se ajustan adecuadamente al spread de mercado, entre ellas la copula normal.

Es importante señalar que el mercado del riesgo de crédito es un mercado dinámico, esto implica que las correlaciones entre los diferentes CDS cambia con el tiempo. Esto hace aconsejable que los modelos de copula usados para valorar CDO deben ser recalibrados frecuentemente para recoger el cambio de correlaciones que se haya producido en el mercado.

Una vez se ha comprobado cual es el comportamiento de las diferentes copulas para el caso del CDO estándar basado en I-traxx, el siguiente paso consiste en comprobar si el comportamiento de estas copulas a la hora de estimar los diferentes tramos puede ser extendido a otro tipo de CDO. Para ello se han cogido 30 CDS que cotizan en el índice Itraxx, estos CDS corresponden a empresas españolas y a empresas europeas de primer nivel de gran capitalización.[10] En este caso los spreads de los CDS están en el rango entre los 10 y los 105 puntos básicos, con un spread medio de 49,7 puntos básicos. El CDO que se ha construido esta compuesto por cuatro tramos. El tramo equity comprende las primeras pérdidas hasta alcanzar el 2% del total del nominal de la cartera subyacente. El primer tramo junior comprende las pérdidas acumuladas hasta el siguiente 4% del nominal. El segundo tramo junior recoge las pérdidas desde el 6% hasta el 10% del total de pérdidas sobre el nominal de la cartera subyacente. Por último el tramo supersenior responde por el resto de pérdidas acumuladas en la cartera subyacente.

[10] Los CDS que integran la cartera del CDO sintético del ejemplo pertenecen a las siguientes empresas: Accor, BAA Plc, BBVA, Boots, Centrica Plc, Compass Group, Daimlerchrysler, Degussa AG, Elctrolux, GKN Holdings, Glencore, Gus Plc, Italia Telecom, Kingfisher Plc, KPN NV, Lafarge, Linde Finance, Lufthansa AG, OTE UK, Pearson Plc, Portugal Telecom, Repsol, Banco Santander, Stora Enso, Telefónica, Thomson, Union Fenosa, UPM-Kymmene, Valeo y Wolters Kluwer.

Al ser un CDO creado ad hoc no se disponen de spreads de mercado para los diferentes tramos que los componen. Con este ejemplo se intenta replicar el proceso de decidir un spread en el que no hay ninguna referencia de mercado. Para ello se ha estimado los spreads para los diferentes tramos usando las copulas normal, t-student, doble t-student, estocástica, Clayton y Marshall-Olkin, los resultados se recogen en el cuadro 3:

Valoración Spreads (pb) CUADRO 3

	Normal	t-Student	Doble t-Student	Estocástica	Clayton	M - O
Tramo Equity	1.230	1.230	1.230	1.230	1.230	1.230
Tramo Junior 1	724	1.165	907	734	731	545
Tramo Junior 2	181	493	548	192	179	16
Tramo Supersenior	5,6	5,2	33,9	6,5	5,4	2,6

Fuente: Elaboración Propia.

En este caso, se observa que tanto la copula normal, como la estocástica y la Clayton estiman similares spreads para el CDO. En este caso tanto la copula t-student como la doble t-student sobreestiman los spreads de los tramos junior y en el caso de la copula doble t-student también sobreestima el spread del tramo supersenior.

Es razonable pensar que dados los resultados obtenidos en este caso la sonrisa de la correlación es plana y que la correlación correcta para valorar los diferentes tramos usando la copula normal es muy parecida. En este caso, parece apropiado usar el estándar del mercado, la copula normal, para valorar este tipo de CDO. Además y al contrario que en el caso anterior no parece aconsejable usar la copula doble t de Student para valorar tramos de este CDO.

De estos dos ejemplos se puede concluir que el modelo que mejor se ajusta a las diferentes características de los CDO es el modelo de copula estocástica. En ambos ejemplos es uno de los que mejor ha recogido las características de la cartera de CDS, en el primer caso ha creado la sonrisa y en el segundo caso ha mantenido una sonrisa de la correlación plana, como parece que corresponde a las características de la cartera. Al ser una derivación de la copula gaussiana estándar que no entraña una gran dificultad adicional sería lógico pensar que se convertirá en el próximo modelo estándar de valoración de CDO.

6. Conclusiones

El método estándar para la valoración de CDO es el modelo de Vasicek o modelo de copula gaussiana. Sin embargo, este método no es adecuado a la hora de valorar todos los tramos de la estructura ya que asume que la correlación necesaria para la correcta valoración de los diferentes tramos debe ser la misma. Si se calibra el modelo usando los spreads de mercado de un CDO y se obtiene la correlación entre los fallidos de la cartera, se observa que para la correcta valoración de los tramos es necesario que la correlación sea diferente para cada tramo. Esto se conoce como la sonrisa de la correlación.

Con la intención de encontrar un método que valore correctamente las estructuras se han desarrollado métodos mas flexibles. Cuando la sonrisa de la correlación existente entre los tramos es muy convexa, es la copula doble t de student la que mejores resultados de ajuste presenta. Si consideramos el CDO de referencia basado en el índice I-traxx, el cual presenta una sonrisa de la correlación convexa, el mejor método para su valoración viene determinado por la copula doble t de student. Sin embargo, cuando nos enfrentamos a la valoración de un CDO cuya sonrisa de la correlación es plana, el método de valoración basado en la copula doble t presenta valoraciones muy alejadas de las de mercado.

Un método que presenta buenas propiedades bajo cualquier forma que tome la sonrisa de la correlación es la copula gaussiana estocástica. Esta copula se aproxima a los valores dados por la copula normal cuando la sonrisa es plana y se aproxima a los valores dados por la copula doble t cuando la sonrisa es convexa. El uso de esta copula ayuda a decidir cual es la copula que mejor se va a ajustar a los spreads de mercado. Este modelo de copula podría convertirse en el nuevo estándar de mercado para valoración de CDO.

En los CDO, como el basado en el índice I-traxx, en que se tiene mas información sobre el comportamiento de los spreads de mercado de cada uno de los tramos se debería considerar explotar la posibilidad de valorar cada uno de los tramos con el modelo que más se ajuste a las valoraciones de mercado.

7. Referencias bibliográficas

AMATO J. Y GYNTELBERG J. (2005). "CDS index tranches and the pricing of credit risk correlations". BIS Quartely Review, March, pp. 73-87.

ANDERSEN L., SIDENIUS J. y BASU S. (2003). "All your hedges in one basket". RISK, November, pp. 67-72.

ANDERSEN L., SIDENIUS J. (2005). "Extensions to the gaussian copula: random recovery and random factor loadings". Journal of Credit Risk, n.º 1, vol. 1, pp. 23-45.

BELSHAM T. y VAUSE N. (2005). "Credit correlation: interpretation and risks". Financial Stability Review: December 2005.

BUTSCHELL X., GREGORY J. y LAURENT J.P. (2005). "A comparative analysis of CDO pricing models". Universidad de Lyon, Working Paper.

DEMARTA S. y MCNEIL A. (2004). "The t Copula and related copulas". Working Paper, ETH-Z.

EMBRECHTS P., LINDSKOG F. y MCNEIL A. (2003). "Modelling dependence with copulas and applications to risk management". Handbook of heavy tailed distributions in finance, Elsevier.

ELIZALDE A. (2005). "Credit risk models I: Default correlation in intensity models". CEMFI, mimeo, disponible en *http://www.abelelizalde.com.*

ELIZALDE A. (2005). "Credit risk models IV: Understanding and princing CDOs". CEMFI, mimeo, disponible en *http://www.abelelizalde.com.*

ELIZALDE A. (2005). "Do we need to worry about credit risk correlation?". CEMFI, Working Paper.

ELOUERKHAOUI Y. (2003a). "Credit risk: correlation with a difference". Working Paper, UBS Warburg.

ELOUERKHAOUI Y. (2003b). "Credit derivatives: basket asymptotics". Working Paper, UBS Warburg.

FRANCO P. (2006). "LHP y modelos de correlación de segunda generación". Seminario MEFF-BME.

FREY R. Y MCNEIL A. (2003). "Dependent defaults in models of portfolio credit risk". Journal of Risk, n.º 6, vol. 1, pp. 59-92.

FRIEND A. y ROGGE E. (2004). "Correlation at first sight". Working Paper. ABN AMRO.

HAIBIN ZHU (2004). "An empirical comparison of credit spread between the bond market and the credit default swap market". BIS Working Paper.

GIESECKE K. (2003). "Dependent defaults in models of portfolio credit risk". Journal of Risk, n.º 6, vol. 1, pp. 59-92.

GREENBERG A., MASHAL R., NALDI M. y SCHLOEGL L. (2004). "Tuning correlation and tail risk to the market prices of liquid tranches". Lehman Brothers, Quantitative Research Quartely.

GREGORY J. y LAURENT J.P. (2003). "I will survive". RISK, June, pp. 103-107.

HULL J. y WHITE A. (2006). "The perfect copula". Working Paper, Universidad de Toronto.

HULL J., PREDESCU M. y WHITE A. (2005). "The valuation of correlation-dependent credit derivatives using a structural model". Working Paper, Universidad de Toronto.

HULL J. y WHITE A. (2000). "Valuing credit default swaps I: no counterparty default risk". Working Paper, Universidad de Toronto.

HULL J. y WHITE A. (2000). "Valuing credit default swaps II: modelling default correlations". Working Paper, Universidad de Toronto.

HULL J. y WHITE A. (2004). "Valuation of a CDO and nth to Default CDS without Monte Carlo Simulation". Journal of Derivatives, n.º 2, pp. 8-23.

LAURENT, J.P. y GREGORY J. (2003). "Basket default swaps, CDOs and factor copulas". Working Paper, Universidad de Lyon.

LI D. (2000). "On default correlation: a copula approach". Journal of Fixed Income, n.º 9, pp. 43-54.

LINDSKOG F. y MCNEIL A. (2003). "Common poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling". ASTIN Bulletin, n.º 33, vol. 2, pp. 209-238.

LOSADA R. (2006). "Estructuras de titulización: características e implicaciones para el sistema financiero". CNMV, Monografía n.º 14.

MADAN D.B., KONIKOV M. y MARINESCU M. (2004). "Credit and basket default swaps". Working Paper, Bloomberg LP.

MARSHALL A. y OLKIN I. (1967). "A multivariate exponential distribution". Journal of the American Statistical Asotiation, vol. 62, pp. 30-44.

MASHAL R. Y ZEEVI A. (2003). "Common poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling". ASTIN Bulletin, n.º 33, vol. 2, pp. 209-238.

MASHAL R., NALDI M. y ZEEVI A. (2003). "On the dependence of equity and assets returns". RISK, October, pp. 83-87.

O'KANE D y SCHLOGL L. (2005). "The large homogeneous portfolio approximation with the student t copula". Working Paper, Lehman Brothers.

PEÑA J.I. (2004). "Correlaciones entre fallidos y derivados de crédito: un modelo para la valoración de CDO". Working Paper, Universidad Carlos III de Madrid.

ROGGE E. y SCHONBUCHER P.J. (2003). "Modelling dynamic portfolio credit risk". Working Paper. Bonn Univesity.

SCHLOEGL, L. (2005). "Modelling correlation skew via mixing copulae and uncertain loss at default". Isaac Newton Institute.

SCHONBUCHER P.J. (2003). "Credit derivatives pricing models". Wiley Finance.

SCHONBUCHER P.J. (2002). "Takent to the limit: simple and not-so-simple loan loss distributions". Working Paper, Bonn University.

SCHONBUCHER P.J. (2000). "Credit risk modelling and credit derivatives". Ph. D Dissertation, Universidad de Dusseldorf.

SCHONBUCHER P.J. y ROGGE E. (2002). "Modelling dynamic portfolio credit risk". Working Paper, Bonn University.

SCHONBUCHER P.J. y SCHUBERT D. (2001). "Copula dependent default risk in intensity models". Working Paper, Bonn University.

WONG D. (2000). "Copula from the limit of a multivariate binary model". Working Paper, Bank of America Corporation.